Maths Elites

Préparation Terminale SM vers l'excellence — mathselites.com

Année scolaire 2026 / 2027

COURS

Suites numériques

Limites, suites adjacentes, suites récurrentes et implicites

Cours entièrement démontré — méthodes, astuces, pièges, exemples, contre-exemples et figures

AUTEUR	NIVEAU	FILIÈRE	ANNÉE	SEMESTRE
R. Abed — Prof agrégé	2e Bac	Sciences Math.	2026 / 2027	S1

Sommaire du chapitre

Généralités sur les suites numériques . . . 3
Définition et modes de génération . . . 3
Raisonnement par récurrence . . . 3
Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques . . . 4
Suites arithmétiques . . . 4
Suites géométriques . . . 4
Suites arithmético-géométriques . . . 5
Suites bornées, suites monotones . . . 6
Suites majorées, minorées, bornées . . . 6
Suites monotones . . . 7
Limite d'une suite . . . 7
Suite convergente . . . 7
Limite infinie — suites divergentes . . . 8
Suites extraites (termes pairs et impairs) . . . 9
Limites de référence . . . 9
Opérations sur les limites . . . 10
Somme, produit, quotient . . . 10
Suite de la forme $f(n)$ et composée par une fonction . . . 11
Limites et relation d'ordre . . . 11
Passage à la limite dans une inégalité . . . 11
Théorèmes de comparaison et d'encadrement 12
Suites monotones : le théorème de la limite monotone . . . 13
Théorème fondamental . . . 13
Suites adjacentes . . . 13
Définition et théorème . . . 13
Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ . . . 14
Bonne définition : intervalle stable . . . 14
Limite éventuelle : le point fixe . . . 15
Monotonie : f croissante ou décroissante . 15
Vitesse de convergence : l'inégalité des accroissements finis . . . 16
Suites définies implicitement . . . 17
Principe et méthode . . . 17
Compléments . . . 19
Encart historique . . . 19
Applications concrètes . . . 19
Carte mentale du chapitre . . . 20
Glossaire des notations . . . 20
Auto-évaluation . . . 20
Pour aller plus loin — vers la CPGE . . . 21

Introduction

« Les mathématiques ne sont pas faites pour comprendre le monde, mais pour apprendre à penser. » — Henri Poincaré

Une **suite** est une liste infinie de nombres $u_0, u_1, u_2, \ldots$ fabriqués selon une règle. Derrière cette idée simple se cachent les grandes questions de l'analyse : que devient u_n quand n devient « très grand » ? la liste se *stabilise*-t-elle autour d'une valeur ? avec quelle *vitesse* ? Archimède encadrait déjà π par les périmètres de polygones inscrits et circonscrits — deux **suites adjacentes** avant l'heure ; Héron d'Alexandrie, lui, calculait $\sqrt{2}$ par une **suite récurrente** qui double le nombre de décimales exactes à chaque étape ; Fibonacci, Bernoulli, Euler puis Cauchy ont fait des suites l'outil naturel de l'**approximation**.

Dans le programme de Terminale SM, ce chapitre arrive après la continuité, la dérivabilité (avec l'**inégalité des accroissements finis**), les fonctions ln et exp : il les *réinvestit* toutes. Il prépare directement le calcul intégral (sommes de Riemann, suites d'intégrales) et, au-delà, les séries et l'analyse numérique de CPGE.

Boîte à outils — Objectifs pédagogiques

À la fin de ce chapitre, l'élève saura :

- reconnaître et exploiter les suites **arithmétiques**, **géométriques**, **arithmético-géométriques** (terme général, sommes) ;
- étudier le **sens de variation** et le caractère **borné** d'une suite ;
- manier la **définition** de la limite, les **opérations**, les formes indéterminées et les limites de référence q^n, n^α ;
- utiliser les théorèmes de **comparaison**, d'**encadrement** et de la **limite monotone** ;
- démontrer que deux suites sont **adjacentes** et en tirer un encadrement ;
- étudier complètement une suite **récurrente** $u_{n+1} = f(u_n)$ (stabilité, monotonie, point fixe, vitesse par l'I.A.F.) ;
- étudier une suite définie **implicitement** comme solution d'une équation.

Rappel de cours

Prérequis. Raisonnement par **récurrence** ; limites et **continuité** des fonctions, T.V.I., théorème de la bijection ; dérivation et **inégalité des accroissements finis** : si $|f'| \leq k$ sur un intervalle I, alors $|f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|$ pour tous $x, y \in I$; fonctions ln, exp, puissances x^α et croissances comparées.

© 2026 — Tous droits réservés

Généralités sur les suites numériques

1. Définition et modes de génération

Définition

Une **suite numérique réelle** est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (ou définie sur $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$). L'image $u(n)$ se note u_n : c'est le **terme d'indice** n (ou terme général). La suite elle-même se note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplement (u_n).

Remarque

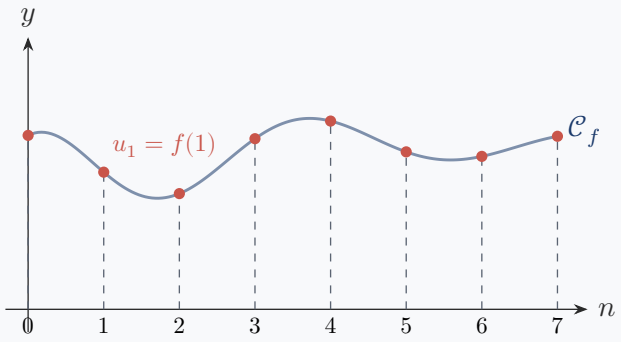
Ne pas confondre la *suite* (u_n) (un objet : toute la liste) et le *nombre* u_n (un terme). De même, u_{n+1} (terme suivant) n'a rien à voir avec $u_n + 1$ (terme augmenté de 1).

Une suite peut être donnée de deux façons principales.

- **Forme explicite** $u_n = f(n)$: on calcule directement chaque terme. Exemple : $u_n = \dfrac{2n+1}{3n+2}$.
- **Forme récurrente** u_0 donné et $u_{n+1} = f(u_n)$: chaque terme se calcule à partir du précédent. Exemple : $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$.

Il existe d'autres modes : récurrence d'ordre 2 ($u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, Fibonacci), sommes $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, ou suites **implicites** (u_n est l'unique solution d'une équation dépendant de n, § 22).

❑ **Représentation graphique d'une suite explicite $u_n = f(n)$**



Les termes $u_n = f(n)$ sont les ordonnées des points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses entières : la suite est un « échantillonnage » de f.

2. Raisonnement par récurrence

Théorème — Principe de récurrence

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant de $n \in \mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si

- **(initialisation)** $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie ;
- **(hérédité)** pour tout $n \geq n_0$: $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$;

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie **pour tout** $n \geq n_0$.

Méthode — Rédiger une récurrence

1. Énoncer clairement $\mathcal{P}(n)$.
2. Initialisation : vérifier $\mathcal{P}(n_0)$.

© 2026 — Tous droits réservés

3. Hérédité : « Soit $n \geq n_0$ **fixé** ; supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, montrons $\mathcal{P}(n+1)$. »
4. Conclure : « Par récurrence, pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$. »

Exemple — Inégalité de Bernoulli

Pour tout $a > -1$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $(1+a)^n \geq 1+na$.
Hérédité. Si $(1+a)^n \geq 1+na$, alors, comme $1+a > 0$, $(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a) = 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$. L'initialisation $(1+a)^0 = 1 \geq 1$ est immédiate. Cette inégalité servira pour la limite de q^n.

Piège à éviter

Une hérédité sans initialisation ne prouve rien : « $10^n + 1$ est divisible par 9 » est héréditaire ($10^{n+1}+1 = 10(10^n+1) - 9$) mais *fausse* pour tout n !

Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques

3. Suites arithmétiques

Définition

Soit $r \in \mathbb{R}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmétique de raison** r si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + r.$$

Autrement dit, la différence $u_{n+1} - u_n$ est **constante**.

Propriété — Terme général, caractérisation, somme

Soit (u_n) arithmétique de raison r.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$ et $\forall n \geq p,\ u_n = u_p + (n-p)r$.
2. Une suite (u_n) est arithmétique **si et seulement si** $\forall n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+1} = u_n + u_{n+2}$ (u_{n+1} est la moyenne arithmétique de ses voisins).
3. Pour $n \geq p$:

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n-p+1)\,\frac{u_p + u_n}{2} = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}.$$

Démonstration. 1. Récurrence immédiate : $u_{n+1} = u_n + r = u_0 + nr + r = u_0 + (n+1)r$. 2. Si (u_n) est arithmétique, $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n = r$, d'où $2u_{n+1} = u_n + u_{n+2}$. Réciproquement, cette égalité s'écrit $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$: la différence est constante, égale à $u_1 - u_0$. 3. Notons $S = u_p + \cdots + u_n$ et écrivons-la dans l'ordre inverse. En ajoutant terme à terme, chaque paire vaut $u_{p+k} + u_{n-k} = u_p + u_n$; il y a $n-p+1$ paires, donc $2S = (n-p+1)(u_p+u_n)$. ■

Exemple

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n \cdot \frac{1 + (2n-1)}{2} = n^2.$$

4. Suites géométriques

© 2026 — Tous droits réservés

Définition

Soit $q \in \mathbb{R}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **géométrique de raison** q si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = q\, u_n.$$

Propriété — Terme général, caractérisation, somme

Soit (u_n) géométrique de raison q.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0\, q^n$ et $\forall n \geq p,\ u_n = u_p\, q^{n-p}$.
2. Une suite (u_n) **à termes non nuls** est géométrique si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}^2 = u_n\, u_{n+2}$.
3. Si $q \neq 1$, pour $n \geq p$:

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p\, \frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q} = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}.$$

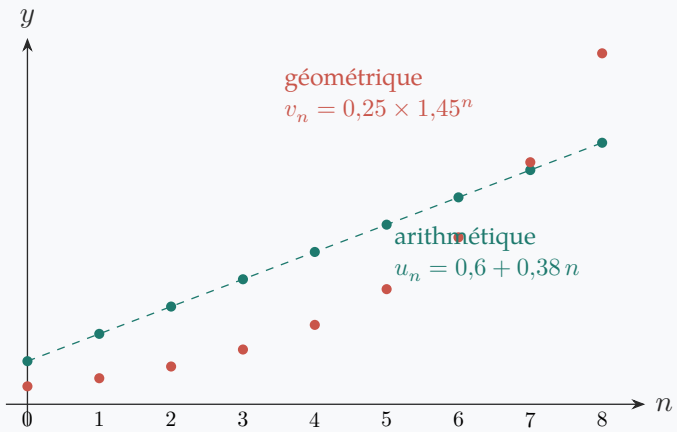
Si $q = 1$, la suite est constante et la somme vaut $(n - p + 1)\, u_p$.

Démonstration. Les points 1 et 2 se traitent comme pour les suites arithmétiques (avec des quotients ; d'où l'hypothèse « termes non nuls »). Pour 3, posons $S = 1 + q + \cdots + q^m$. Alors $qS = q + \cdots + q^{m+1}$, et par télescopage $S - qS = 1 - q^{m+1}$, d'où $S = \dfrac{1-q^{m+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$. On applique avec $u_p + \cdots + u_n = u_p(1 + q + \cdots + q^{n-p})$. ■

Piège à éviter

Dans la caractérisation $u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2}$, l'hypothèse « termes non nuls » est indispensable : la suite $1, 0, 0, 5, 0, 0, \ldots$ vérifie $u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2}$ dès $n \geq 1$... sans être géométrique. Et dans la somme, on compte le **nombre de termes** $(n - p + 1)$, pas l'indice du dernier !

❑ **Croissance linéaire contre croissance exponentielle**



Les points d'une suite arithmétique sont alignés ; une suite géométrique de raison $q > 1$ finit toujours par dépasser n'importe quelle suite arithmétique.

5. Suites arithmético-géométriques

© 2026 — Tous droits réservés

Définition

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Une suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = a\,u_n + b$$

est dite **arithmético-géométrique**. Si $a = 1$ elle est arithmétique ; si $b = 0$ elle est géométrique.

Méthode — Terme général d'une suite arithmético-géométrique ($a \neq 1$)

1. **Point fixe.** Résoudre $\alpha = a\alpha + b$: $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$.
2. **Suite auxiliaire.** Poser $v_n = u_n - \alpha$. En soustrayant $\alpha = a\alpha + b$ à $u_{n+1} = au_n + b$, on obtient $v_{n+1} = a\,v_n$: (v_n) est géométrique de raison a.
3. **Conclure.** $v_n = a^n v_0$, d'où $\boxed{u_n = \alpha + a^n(u_0 - \alpha)}$.

Exemple

$u_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$. Point fixe : $\alpha = \frac{2}{5}\alpha + 3 \iff \alpha = 5$. Donc $u_n - 5 = \left(\frac{2}{5}\right)^n (1-5)$, soit $u_n = 5 - 4\left(\frac{2}{5}\right)^n$. Comme $0 < \frac{2}{5} < 1$, on verra que $u_n \to 5$: le point fixe est la *limite*.

Méthode — Suites homographiques : la même idée

Pour $u_{n+1} = \dfrac{\alpha u_n + \beta}{\gamma u_n + \delta}$, on cherche les points fixes $x = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$. S'il y en a deux, $p \neq q$, la suite $v_n = \dfrac{u_n - p}{u_n - q}$ est géométrique.

Exemple — Suite homographique

$u_0 = 0$, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 6}{u_n - 1}$. Les points fixes vérifient $x^2 - 5x + 6 = 0$: ce sont 2 et 3. Pour $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 3}$, on calcule

$$u_{n+1} - 2 = \frac{2(u_n - 2)}{u_n - 1}, \qquad u_{n+1} - 3 = \frac{u_n - 3}{u_n - 1}, \qquad \text{donc} \quad v_{n+1} = 2v_n.$$

Ainsi $v_n = \frac{2}{3}\,2^n$, puis (en résolvant $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 3}$) $u_n = \dfrac{3v_n - 2}{v_n - 1} = \dfrac{6(2^n - 1)}{2^{n+1} - 3}$, et l'on vérifie que $u_n \neq 1$ pour tout n (sinon $2^{n+1} = \frac{3}{2}$).

Suites bornées, suites monotones

6. Suites majorées, minorées, bornées

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que (u_n) est :

- **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$;
- **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$;
- **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

© 2026 — Tous droits réservés

Piège à éviter

Le majorant M est un réel **quelconque** : il n'a pas à être positif, et il doit être **indépendant de** n. « $u_n \leq n+1$ » ne prouve pas que (u_n) est majorée ! De même, un minorant peut être négatif : $u_n = -1 - \frac{1}{n+1}$ est minorée par -2.

Propriété — Caractérisation par la valeur absolue

(u_n) est bornée **si et seulement si** il existe $M \geq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$.

Démonstration. Si $m \leq u_n \leq M'$ pour tout n, alors $|u_n| \leq \max(|m|, |M'|)$. Réciproquement, $|u_n| \leq M$ équivaut à $-M \leq u_n \leq M$. ■

Exemple

- $u_n = \sin\left(\frac{n^2+1}{n+1}\right)$: $|u_n| \leq 1$, donc (u_n) est bornée.
- $u_n = \arctan\left(\sqrt{3n^2+3n+1}\right)$: $0 \leq u_n < \frac{\pi}{2}$.
- $u_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$: $0 \leq u_n \leq 1$ car $n^2+1-2n = (n-1)^2 \geq 0$.

7. Suites monotones

Définition

La suite (u_n) est **croissante** (resp. **strictement croissante**) si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n < u_{n+1}$) ; **décroissante** (resp. strictement) si $\forall n,\ u_{n+1} \leq u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$) ; **monotone** si elle est croissante ou décroissante ; **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang.

Méthode — Étudier le sens de variation

1. **Différence** : étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
2. **Quotient** (si $u_n > 0$ pour tout n) : comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
3. **Fonction** : si $u_n = f(n)$ avec f monotone sur $[0, +\infty[$, (u_n) a le même sens de variation que f.
4. **Récurrence** : pour $u_{n+1} = f(u_n)$, montrer par récurrence $u_n \leq u_{n+1}$ (voir § 18).

Piège à éviter

Le critère du quotient **exige** des termes **strictement positifs** : $u_n = -2^n$ vérifie $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1$ et pourtant elle est *décroissante*. Et la réciproque du point 3 est fausse : $u_n = \sin(n\pi) = 0$ est constante alors que sin n'est pas monotone.

Exemple

$u_0 = 1, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$. Par récurrence $u_n > 0$, et $u_{n+1}^2 - u_n^2 = 1$: la suite (u_n^2) est arithmétique de raison 1, donc $u_n^2 = n+1$, $u_n = \sqrt{n+1}$: la suite est **strictement croissante**.

Limite d'une suite

8. Suite convergente

© 2026 — Tous droits réservés

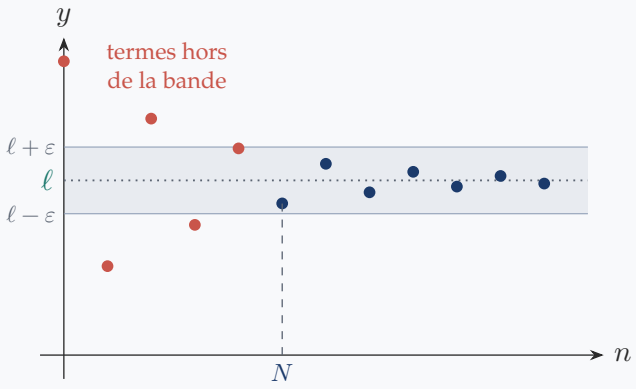
Définition

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que (u_n) **converge vers** ℓ (ou tend vers ℓ) si tout intervalle ouvert centré en ℓ contient *tous* les termes de la suite à partir d'un certain rang :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

On écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

❑ **Convergence vers ℓ : la bande $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$**



Pour la précision ε choisie, tous les termes d'indice $n \geq N$ sont dans la bande. La convergence n'a aucune raison d'être monotone.

Exemple — Utiliser la définition

$u_n = \dfrac{2n+1}{3n+2}$. On a $\left|u_n - \frac{2}{3}\right| = \dfrac{1}{9n+6} \leq \dfrac{1}{9n}$ (pour $n \geq 1$). Soit $\varepsilon > 0$; si N est un entier $\geq \frac{1}{9\varepsilon}$, alors pour $n \geq N$: $\left|u_n - \frac{2}{3}\right| \leq \frac{1}{9N} \leq \varepsilon$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{3}$.

Théorème — Unicité de la limite

Si (u_n) converge, sa limite est **unique**.

Démonstration. Supposons $u_n \to \ell$ et $u_n \to \ell'$ avec $\ell \neq \ell'$. Posons $\varepsilon = \frac{|\ell-\ell'|}{3} > 0$. Il existe N_1 et N_2 tels que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N_1$ et $|u_n - \ell'| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N_2$. Pour $n = \max(N_1, N_2)$: $|\ell - \ell'| \leq |\ell - u_n| + |u_n - \ell'| \leq 2\varepsilon = \frac{2}{3}|\ell - \ell'|$, ce qui est absurde. ■

Propriété — Convergente ⇒ bornée

Toute suite convergente est **bornée**.

Démonstration. Si $u_n \to \ell$, avec $\varepsilon = 1$ il existe N tel que, pour $n \geq N$, $|u_n| \leq |\ell| + 1$. Donc pour tout n : $|u_n| \leq \max\left(|u_0|, \ldots, |u_{N-1}|, |\ell| + 1\right)$. ■

Piège à éviter

La réciproque est **fausse** : $u_n = (-1)^n$ est bornée mais ne converge pas. En effet, si $u_n \to \ell$, alors $u_{2n} = 1 \to \ell$ et $u_{2n+1} = -1 \to \ell$ (voir la propriété des suites extraites ci-dessous), d'où $\ell = 1 = -1$: absurde.

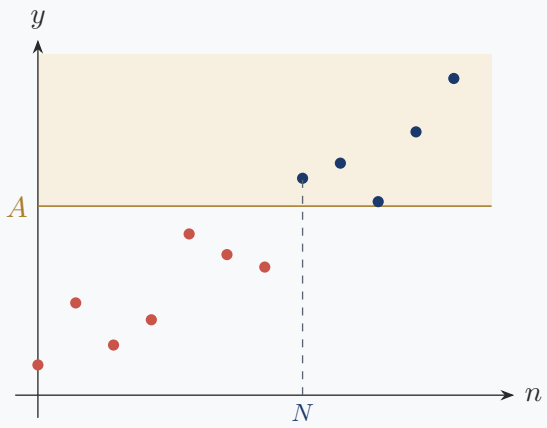
9. Limite infinie — suites divergentes

© 2026 — Tous droits réservés

Définition

On dit que (u_n) **tend vers** $+\infty$ si $\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n \geq A$; et qu'elle **tend vers** $-\infty$ si $\forall B < 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n \leq B$.
Une suite qui ne converge pas est dite **divergente** : soit elle tend vers $\pm\infty$, soit elle n'a **pas de limite** (comme $(-1)^n$).

❑ **Suite tendant vers $+\infty$ (sans être croissante)**



Aussi grand que soit A, tous les termes finissent par le dépasser définitivement — même si la suite oscille.

Piège à éviter

« Non majorée » n'entraîne pas « tend vers $+\infty$ » : $u_n = n\,(1 + (-1)^n)$ vaut 0 pour n impair et $2n$ pour n pair ; elle n'est pas majorée mais n'a pas de limite.

10. Suites extraites (termes pairs et impairs)

Théorème — Suites des rangs pairs et impairs

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ (fini ou infini), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell$.
2. Réciproquement, si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont la **même** limite ℓ, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Démonstration. 1. Si $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$, c'est vrai a fortiori pour $2n \geq N$ et $2n+1 \geq N$, donc pour $n \geq N$. 2. Soit $\varepsilon > 0$; il existe N_1 et N_2 tels que $|u_{2p} - \ell| \leq \varepsilon$ pour $p \geq N_1$ et $|u_{2p+1} - \ell| \leq \varepsilon$ pour $p \geq N_2$. Pour $n \geq \max(2N_1, 2N_2 + 1)$, que n soit pair ou impair, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. ■

11. Limites de référence

Propriété — Puissances de n

Pour $\alpha \in \mathbb{Q}$ (et plus généralement $\alpha \in \mathbb{R}$) : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$ si $\alpha > 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$ si $\alpha < 0$; $n^0 = 1$. En particulier $\sqrt{n} \to +\infty$, $\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$.

Théorème — Suites géométriques (q^n)

Soit $q \in \mathbb{R}$.

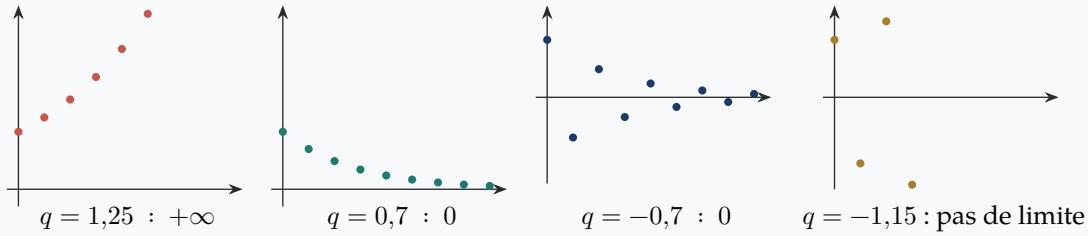
1. Si $q > 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
2. Si $-1 < q < 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
3. Si $q = 1$: $q^n = 1 \to 1$.

© 2026 — Tous droits réservés

4. Si $q \leq -1$: la suite (q^n) **n'a pas de limite**.

Démonstration. 1. Écrivons $q = 1 + a$ avec $a > 0$. Par Bernoulli, $q^n \geq 1 + na$, et $1 + na \to +\infty$; on conclut par comparaison (§ 14). 2. Si $q = 0$ c'est clair. Sinon $\frac{1}{|q|} > 1$, donc $\frac{1}{|q|^n} \to +\infty$ et $|q^n| = |q|^n \to 0$, d'où $q^n \to 0$. 4. Pour $q \leq -1$: $q^{2n} = (q^2)^n \geq 1$ et $q^{2n+1} \leq q \leq -1$. Si (q^n) avait une limite ℓ, les deux suites extraites tendraient vers ℓ, avec $\ell \geq 1$ et $\ell \leq -1$: absurde. ■

❑ **Les quatre comportements de (q^n)**



Seul $|q|$ décide de la convergence ; le signe de q ne fait qu'ajouter des oscillations.

Propriété — Limites utiles (croissances comparées)

Pour $\alpha > 0$ et $q > 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{q^n} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Démonstration. Les deux premières découlent des croissances comparées des fonctions (car $u_n = f(n)$ avec $\lim_{+\infty} f = 0$, voir ci-dessous ; et $\frac{n^\alpha}{q^n} = \mathrm{e}^{\alpha \ln n - n \ln q}$ avec $\alpha \ln n - n \ln q = n(\alpha \frac{\ln n}{n} - \ln q) \to -\infty$). Pour la troisième ($x \neq 0$) : $n \ln(1 + \frac{x}{n}) = x \cdot \dfrac{\ln(1+h)}{h}$ avec $h = \frac{x}{n} \to 0$, et $\frac{\ln(1+h)}{h} \to 1$ (nombre dérivé de ln en 1) ; on compose par exp, continue. ■

Opérations sur les limites

12. Somme, produit, quotient

Les règles sont les mêmes que pour les fonctions. Dans les tableaux, ℓ, ℓ' sont des réels et « F.I. » signale une **forme indéterminée**.

$\lim u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

$\lim u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim(u_n v_n)$	$\ell\ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.

$\lim u_n$	ℓ	ℓ	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	ℓ'	0 (signe constant)	0	$\pm\infty$
$\lim \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.	F.I.

Dans les cas « $\pm\infty$ », le signe s'obtient par la règle des signes.

© 2026 — Tous droits réservés

Méthode — Lever une forme indéterminée

- **Fractions rationnelles en** n : factoriser par le terme de plus haut degré.
- **Puissances** a^n : factoriser par la puissance de **plus grande base**. Ex. $\dfrac{5^n+3^n}{5^{n+1}+2^n} = \dfrac{1+(3/5)^n}{5+(2/5)^n} \to \dfrac{1}{5}$.
- **Radicaux** : quantité conjuguée. Ex. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$.
- **Formes** 1^∞ : passer à l'exponentielle, $u_n^{v_n} = \mathrm{e}^{v_n \ln u_n}$.

Piège à éviter

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ n'est **pas** « $1^{+\infty} = 1$ » : c'est une forme indéterminée, et sa limite est e. De même $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \to +\infty$.

13. Suite de la forme $f(n)$ et composée par une fonction

Propriété — Suite $u_n = f(n)$

Si f est définie sur $[a,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ (L fini ou infini), alors la suite $u_n = f(n)$ vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.

Piège à éviter

La réciproque est fausse : $u_n = \sin(n\pi) = 0 \to 0$, alors que $\sin(\pi x)$ n'a pas de limite en $+\infty$. Et le sens de variation de f n'est utile que si f est monotone.

Théorème — Composition par une fonction

Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ (a réel ou $\pm\infty$), et f une fonction définie sur un intervalle contenant les u_n telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = b$.

Cas fondamental : si $u_n \to \ell \in I$ et si f est **continue en** ℓ, alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)}$.

Démonstration. (cas continu) Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité, il existe $\delta > 0$ tel que $|x-\ell| \le \delta \Rightarrow |f(x)-f(\ell)| \le \varepsilon$. Comme $u_n \to \ell$, il existe N tel que $|u_n - \ell| \le \delta$ pour $n \ge N$; alors $|f(u_n)-f(\ell)| \le \varepsilon$. ■

Exemple

- Si $u_n \ge 0$ et $u_n \to \ell$, alors $\sqrt[m]{u_n} \to \sqrt[m]{\ell}$ ($m \in \mathbb{N}^*$) : la racine m-ième est continue sur $[0,+\infty[$.
- arctan est continue sur $\mathbb{R}$: $u_n \to \ell \Rightarrow \arctan u_n \to \arctan \ell$, et $u_n \to +\infty \Rightarrow \arctan u_n \to \frac{\pi}{2}$.
- $n^{1/n} = \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}} \to \mathrm{e}^0 = 1$ et $n \sin\frac{1}{n} = \left.\dfrac{\sin h}{h}\right|_{h=1/n} \to 1$.

Limites et relation d'ordre

14. Passage à la limite dans une inégalité

© 2026 — Tous droits réservés

Théorème — Conservation des inégalités larges

Soient (u_n) et (v_n) deux suites **convergentes**, de limites ℓ et ℓ'. Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leq \ell'$.
En particulier, si $a \leq u_n \leq b$ à partir d'un certain rang, alors $a \leq \ell \leq b$.

Démonstration. Posons $w_n = v_n - u_n \geq 0$ (pour $n \geq n_0$), qui converge vers $L = \ell' - \ell$. Si l'on avait $L < 0$, avec $\varepsilon = -\frac{L}{2} > 0$ on trouverait N tel que $w_n \leq L + \varepsilon = \frac{L}{2} < 0$ pour $n \geq N$; pour $n \geq \max(N, n_0)$ c'est contradictoire. Donc $L \geq 0$. ■

Piège à éviter

Les inégalités **strictes** ne passent pas à la limite : elles deviennent **larges**. Pour $u_n = \frac{1}{n}$: $\forall n \geq 1,\ u_n > 0$, et pourtant $\lim u_n = 0$. On écrira donc toujours : « $u_n > 0$ pour tout n, donc $\ell \geq 0$ ».

15. Théorèmes de comparaison et d'encadrement

Théorème — Théorème des gendarmes

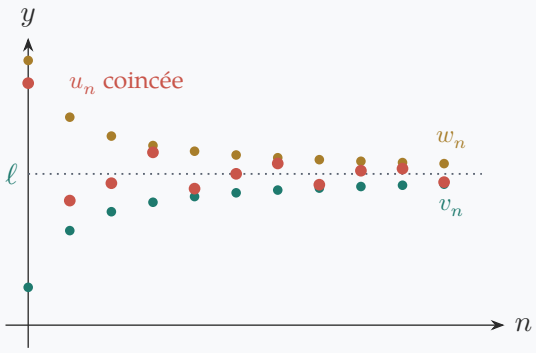
Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites et $\ell \in \mathbb{R}$. Si

1. $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang ;
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$;

alors (u_n) **converge** et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N (assez grand pour que l'encadrement soit vrai) tel que, pour $n \geq N$: $\ell - \varepsilon \leq v_n$ et $w_n \leq \ell + \varepsilon$. Alors $\ell - \varepsilon \leq v_n \leq u_n \leq w_n \leq \ell + \varepsilon$, c'est-à-dire $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. ■

❑ Théorème des gendarmes



(u_n) peut osciller : coincée entre deux suites de même limite, elle n'a pas le choix.

Propriété — Variantes très utilisées

1. Si $|u_n - \ell| \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $v_n \to 0$, alors $u_n \to \ell$.
2. Si $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang et $v_n \to +\infty$, alors $u_n \to +\infty$.
3. Si $u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et $w_n \to -\infty$, alors $u_n \to -\infty$.
4. (Bornée × tend vers 0) Si (a_n) est bornée et $\varepsilon_n \to 0$, alors $a_n\varepsilon_n \to 0$.

Démonstration. 1. $\ell - v_n \leq u_n \leq \ell + v_n$: gendarmes. 2. Pour $A > 0$, il existe N tel que $v_n \geq A$ dès $n \geq N$; alors $u_n \geq v_n \geq A$. 3. Idem. 4. Si $|a_n| \leq M$, $|a_n\varepsilon_n| \leq M\,|\varepsilon_n| \to 0$: on applique 1. ■

© 2026 — Tous droits réservés

Exemple

- $u_n = \dfrac{\arctan(n^3)}{\sqrt{n}+1} : 0 \le u_n \le \dfrac{\pi/2}{\sqrt{n}} \to 0$, donc $u_n \to 0$.
- $u_n = n + (-1)^n\sqrt{n} \ \ge \ n - \sqrt{n} = \sqrt{n}(\sqrt{n}-1) \to +\infty$, donc $u_n \to +\infty$.
- $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$: chacun des n termes est entre $\frac{n}{n^2+n}$ et $\frac{n}{n^2+1}$, d'où $\dfrac{n^2}{n^2+n} \le S_n \le \dfrac{n^2}{n^2+1}$: $S_n \to 1$.

Suites monotones : le théorème de la limite monotone

16. Théorème fondamental

Théorème — Limite monotone — admis

1. Toute suite **croissante et majorée** converge.
2. Toute suite **décroissante et minorée** converge.

Remarque

Ce théorème est *admis* en Terminale : sa preuve repose sur la *propriété de la borne supérieure* de $\mathbb{R}$ (CPGE). On peut préciser : si (u_n) est croissante et majorée par M, alors $\lim u_n = \ell \le M$ et $u_n \le \ell$ pour tout n (passage à la limite dans $u_n \le u_p$ pour $p \ge n$).

Propriété — Croissante non majorée

1. Toute suite **croissante non majorée** tend vers $+\infty$.
2. Toute suite **décroissante non minorée** tend vers $-\infty$.

Par conséquent, une suite **monotone a toujours une limite** (finie ou infinie).

Démonstration. Soit $A > 0$. Comme (u_n) n'est pas majorée, A n'est pas un majorant : il existe N avec $u_N > A$. Par croissance, pour $n \ge N$, $u_n \ge u_N > A$. Donc $u_n \to +\infty$. ■

Piège à éviter

- « Bornée » ne suffit pas : $(-1)^n$ est bornée et diverge.
- « Croissante » ne suffit pas : (n) diverge.
- « Majorée par M » ne dit pas que la limite *vaut* M : $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ est majorée par 5 et tend vers 1.

Exemple — Divergence de la série harmonique

$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est croissante. Or $H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \ge n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. Si (H_n) convergeait vers ℓ, on aurait $H_{2n} - H_n \to \ell - \ell = 0$: absurde. Donc (H_n) n'est pas majorée et $H_n \to +\infty$ — alors que $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} \to 0$!

Suites adjacentes

© 2026 — Tous droits réservés

17. Définition et théorème

Définition

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** si :

1. l'une est **croissante**, disons (u_n) ;
2. l'autre est **décroissante**, (v_n) ;
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

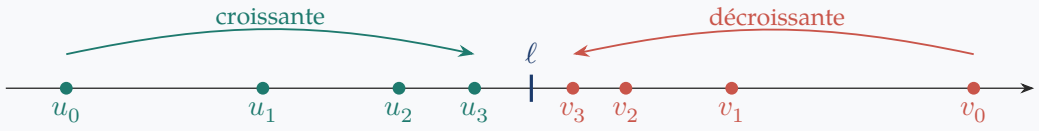
Théorème — Suites adjacentes

Deux suites adjacentes **convergent** et ont la **même limite** ℓ. De plus, avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_n\le\ell\le v_n.$$

Démonstration. La suite $w_n=v_n-u_n$ est décroissante (différence d'une suite décroissante et d'une suite croissante) et tend vers 0 ; donc $w_n\ge 0$ pour tout n (sinon, si $w_p<0$, on aurait $w_n\le w_p<0$ pour $n\ge p$ et la limite serait $\le w_p<0$). Ainsi $u_0\le u_n\le v_n\le v_0$: (u_n) est croissante et majorée par v_0, (v_n) décroissante et minorée par u_0. Par le théorème de la limite monotone, elles convergent vers ℓ et ℓ', et $\ell'-\ell=\lim w_n=0$. Enfin, $u_n\le\ell$ (croissante) et $\ell\le v_n$ (décroissante). ■

❑ Deux suites adjacentes « se referment » sur ℓ



À chaque rang, $[u_n,v_n]$ est un encadrement de ℓ d'amplitude $v_n-u_n\to 0$: c'est un algorithme d'approximation.

Méthode — Montrer que deux suites sont adjacentes

Vérifier **les trois conditions** : signe de $u_{n+1}-u_n$, signe de $v_{n+1}-v_n$, limite de v_n-u_n. Ne pas oublier la troisième : $u_n=-\frac{1}{n}$ et $v_n=1+\frac{1}{n}$ sont monotones de sens contraires mais pas adjacentes.

Exemple — Une approximation de e

$u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ et $v_n=u_n+\frac{1}{n\cdot n!}$ $(n\ge 1)$. On a $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)!}>0$ et

$$\begin{aligned}v_{n+1}-v_n&=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)(n+1)!}-\frac{1}{n\cdot n!}\\&=\frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n(n+1)\,(n+1)!}=\frac{-1}{n(n+1)\,(n+1)!}<0,\end{aligned}$$

et $v_n-u_n=\frac{1}{n\cdot n!}\to 0$. Elles sont adjacentes ; leur limite commune est e (admis ici), et $u_{10}\le \mathrm{e}\le v_{10}$ donne e à $3\cdot 10^{-8}$ près.

Suites récurrentes $u_{n+1}=f(u_n)$

18. Bonne définition : intervalle stable

© 2026 — Tous droits réservés

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que l'intervalle I est **stable** par f si $f(I) \subset I$. Dans ce cas, pour tout $u_0 \in I$, la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ définit une suite dont **tous les termes sont dans** I (récurrence).

Remarque

Sans stabilité, la suite peut «sortir» du domaine : avec $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $u_0 = 5$, on obtient $u_1 = 2$, $u_2 = 1$, $u_3 = 0$, et $u_4 = \sqrt{-1}$ n'existe pas.

19. Limite éventuelle : le point fixe

Théorème — Théorème du point fixe

Soit $f : I \to I$ avec I stable, $u_0 \in I$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si

1. (u_n) converge vers ℓ ;
2. $\ell \in I$ et f est **continue en** ℓ ;

alors $\boxed{f(\ell) = \ell}$: ℓ est un **point fixe** de f.

Démonstration. D'une part $u_{n+1} \to \ell$ (suite extraite) ; d'autre part $u_{n+1} = f(u_n) \to f(\ell)$ par continuité. Par unicité de la limite, $f(\ell) = \ell$. ■

Remarque

Si $I = [a, b]$ est **fermé**, la condition $\ell \in I$ est automatique ($a \leq u_n \leq b \Rightarrow a \leq \ell \leq b$). Si I est ouvert, il faut l'établir à la main (exemple : $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$ sur $I =]0, 1]$ tend vers $0 \notin I$).

Piège à éviter

Ce théorème dit seulement : «*si* la suite converge, *alors* sa limite est un point fixe». Il ne prouve pas la convergence, et quand f a plusieurs points fixes il faut **trancher** (encadrement, monotonie). Pour $u_{n+1} = u_n^2$, les points fixes sont 0 et 1, mais avec $u_0 = 2$, $u_n = 2^{2^n} \to +\infty$.

20. Monotonie : f croissante ou décroissante

Théorème — Cas f croissante

Si f est **croissante** sur I stable, la suite (u_n) est **monotone** : croissante si $u_0 \leq u_1$, décroissante si $u_0 \geq u_1$.
De plus, si ℓ est un point fixe et $u_0 \leq \ell$, alors $u_n \leq \ell$ pour tout n.

Démonstration. Supposons $u_0 \leq u_1$. Si $u_n \leq u_{n+1}$, alors, f étant croissante, $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, i.e. $u_{n+1} \leq u_{n+2}$: récurrence. De même, $u_n \leq \ell$ donne $f(u_n) \leq f(\ell)$, i.e. $u_{n+1} \leq \ell$. ■

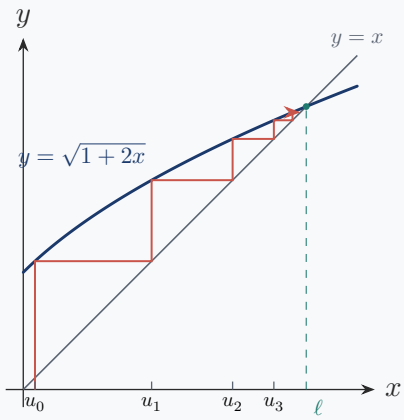
Théorème — Cas f décroissante

Si f est **décroissante** sur I stable, alors $g = f \circ f$ est croissante, et les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}), qui vérifient $u_{2n+2} = g(u_{2n})$ et $u_{2n+3} = g(u_{2n+1})$, sont **monotones de sens contraires**. La suite (u_n) converge si et seulement si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la **même** limite.

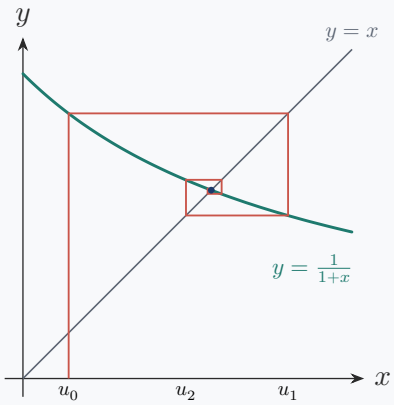
Démonstration. g est croissante (composée de deux décroissantes) ; on applique le cas précédent à (u_{2n}) et (u_{2n+1}). Si (u_{2n}) est croissante, $u_{2n} \leq u_{2n+2}$ et f décroissante donnent $u_{2n+1} \geq u_{2n+3}$: (u_{2n+1}) est décroissante. La dernière phrase est le théorème des suites extraites. ■

© 2026 — Tous droits réservés

❑ Diagrammes « en escalier » et « en escargot »



f croissante : (u_n) monotone



f décroissante : (u_n) alterne

On lit $u_{n+1} = f(u_n)$ sur la courbe, puis on le reporte sur l'axe des abscisses grâce à la droite $y = x$. Les points fixes sont les intersections de $\mathcal{C}_f$ avec $y = x$.

Méthode — Plan d'étude d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Étudier f ; trouver un intervalle I **stable** contenant u_0.
2. Chercher les **points fixes** (signe de $f(x) - x$).
3. Monotonie : f croissante $\Rightarrow$ comparer u_0 et u_1 (ou signe de $f(x) - x$ sur I) ; f décroissante $\Rightarrow$ suites (u_{2n}), (u_{2n+1}).
4. Bornes par récurrence, puis **limite monotone** ; identifier la limite grâce au théorème du point fixe (continuité !).
5. Si possible, **vitesse** par l'I.A.F. (ci-dessous).

Exemple — Étude complète

$u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + 2u_n}$. Ici $f(x) = \sqrt{1 + 2x}$ est continue et croissante sur $I = [0, +\infty[$, stable. Points fixes : $x = \sqrt{1 + 2x} \iff x \geq 0$ et $x^2 - 2x - 1 = 0 \iff x = 1 + \sqrt{2}$.

- *Encadrement.* Par récurrence $1 \leq u_n \leq 1 + \sqrt{2}$: si c'est vrai au rang n, f croissante donne $f(1) = \sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq f(1 + \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}$.
- *Monotonie.* $u_1 = \sqrt{3} \geq u_0$ et f croissante : (u_n) est croissante.
- *Limite.* Croissante et majorée, elle converge vers $\ell \in [1, 1 + \sqrt{2}]$; f étant continue en ℓ, $f(\ell) = \ell$, donc $\ell = 1 + \sqrt{2}$.

21. Vitesse de convergence : l'inégalité des accroissements finis

Théorème — Contraction

Soit f dérivable sur un intervalle I stable, $\ell \in I$ un point fixe de f, et $k \in [0, 1[$ tel que $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in I$. Alors, pour tout $u_0 \in I$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - \ell| \leq k\,|u_n - \ell| \qquad \text{et} \qquad |u_n - \ell| \leq k^n\,|u_0 - \ell|\,.$$

En particulier $u_n \to \ell$ (et ℓ est l'unique point fixe de f dans I).

Démonstration. Par l'I.A.F. entre u_n et ℓ (tous deux dans I) : $|f(u_n) - f(\ell)| \leq k\,|u_n - \ell|$, c'est-à-dire $|u_{n+1} - \ell| \leq k\,|u_n - \ell|$. Par récurrence, $|u_n - \ell| \leq k^n\,|u_0 - \ell|$, et $k^n \to 0$ car $0 \leq k < 1$. ■

© 2026 — Tous droits réservés

Exemple — Le nombre d'or

$u_0 = 1$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$. Sur $I = [\frac{1}{2}, 1]$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$ est décroissante, $f(I) = [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] \subset I$, et $|f'(x)| = \frac{1}{(1+x)^2} \leq \frac{4}{9}$. L'unique point fixe dans I est $\ell = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (racine de $x^2 + x - 1 = 0$). Donc

$$|u_n - \ell| \leq \left(\tfrac{4}{9}\right)^n |1 - \ell| \leq \left(\tfrac{4}{9}\right)^n \times 0{,}4,$$

et $u_n \to \frac{\sqrt{5}-1}{2}$: 20 itérations donnent déjà 7 décimales exactes.

Astuce

Pour choisir I, partir d'un intervalle **fermé** contenant le point fixe sur lequel $|f'|$ est *strictement* inférieur à 1, puis vérifier la stabilité. Le cas $|f'(\ell)| = 1$ est délicat (convergence lente ou divergence) : voir $u_{n+1} = \sin u_n$ dont la limite est 0 et $\cos 0 = 1$.

Suites définies implicitement

22. Principe et méthode

On définit u_n comme l'**unique solution** d'une équation $f_n(x) = 0$ sur un intervalle (via le théorème de la bijection). On n'a pas de formule pour u_n : on étudie la suite à travers les fonctions f_n.

Méthode — Étudier une suite implicite

1. **Existence et unicité** : f_n continue, strictement monotone, changement de signe (T.V.I. + bijection).
2. **Encadrement** : calculer le signe de $f_n(a)$, $f_n(b)$ pour a, b bien choisis.
3. **Monotonie** : calculer le signe de $f_{n+1}(u_n)$ et le comparer à $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$; conclure par la monotonie de f_{n+1}.
4. **Limite** : limite monotone, puis passage à la limite dans $f_n(u_n) = 0$ (attention : f_n dépend de n, on ne remplace pas naïvement u_n par ℓ).

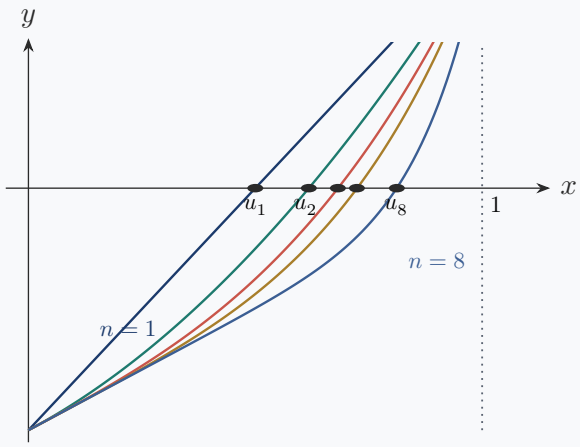
Exemple — $x^n + x - 1 = 0$

Pour $n \geq 1$, $f_n(x) = x^n + x - 1$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, avec $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = 1 > 0$: l'équation a une unique solution $u_n \in]0, 1[$.

- *Monotonie.* $f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} + u_n - 1 = u_n^{n+1} - u_n^n = u_n^n(u_n - 1) < 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$. Comme f_{n+1} est strictement croissante, $u_n < u_{n+1}$.
- *Limite.* Croissante et majorée par 1 : $u_n \to \ell \leq 1$. Si $\ell < 1$, alors $0 < u_n^n \leq \ell^n \to 0$, donc $u_n = 1 - u_n^n \to 1$: contradiction. Ainsi $\ell = 1$.

© 2026 — Tous droits réservés

❑ **Les fonctions $f_n(x) = x^n + x - 1$ et leurs zéros u_n**



Quand n augmente, x^n s'écrase sur $[0, 1[$: la courbe se rapproche de la droite $y = x - 1$ et le zéro u_n glisse vers 1.

© 2026 — Tous droits réservés

Compléments

23. Encart historique

Boîte à outils — Des suites avant les suites

$\approx III^{e}$ s. av. J.-C. — Archimède
encadre π entre $3+\frac{10}{71}$ et $3+\frac{1}{7}$ grâce aux polygones à 96 côtés : deux suites adjacentes (exercice 7).

I^{er} s. — Héron d'Alexandrie
calcule $\sqrt{a}$ par $u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+\frac{a}{u_n})$, une suite récurrente à convergence très rapide.

1202 — Fibonacci
introduit $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$; $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ tend vers le nombre d'or.

1737 — Euler
prouve l'irrationalité de e et calcule $\sum \frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$ (problème 1, exercice 8).

1799 — Gauss
étudie la moyenne arithmético-géométrique (problème 4).

1821 — Cauchy
donne la définition moderne de la convergence ; **Weierstrass** et **Dedekind** fondent ensuite $\mathbb{R}$ et le théorème de la limite monotone.

24. Applications concrètes

Remarque

Finance
Un capital placé à taux t suit une suite géométrique $C_n = C_0(1+t)^n$; un emprunt remboursé par mensualités constantes conduit à une suite arithmético-géométrique.

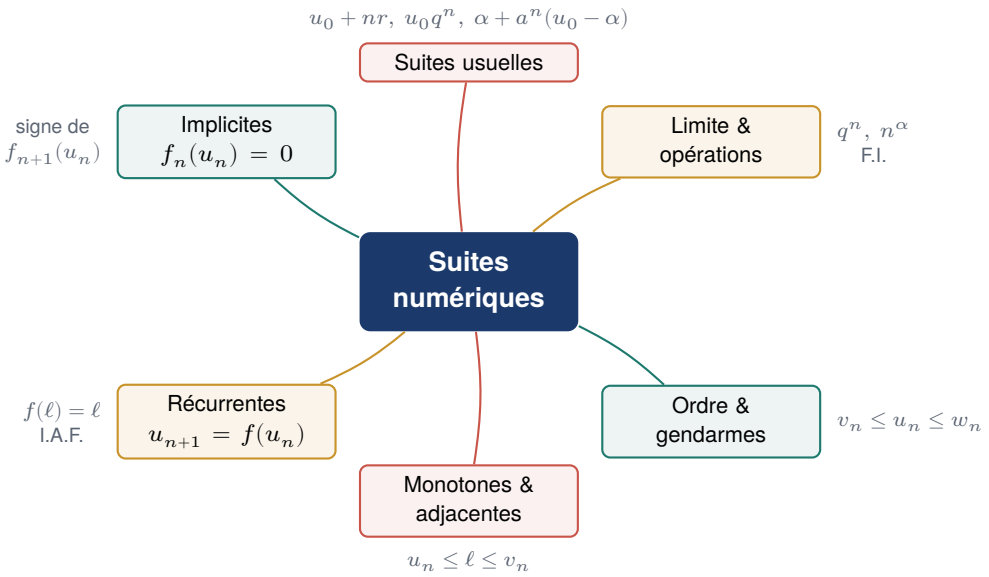
Biologie
Le modèle logistique $u_{n+1} = ru_n(1-u_n)$ décrit une population : selon r, convergence, oscillations, voire *chaos*.

Informatique
Les méthodes itératives (point fixe, Newton, dichotomie) calculent les racines, les racines carrées des processeurs, les solutions d'équations non linéaires.

Physique
La décroissance radioactive observée à intervalles réguliers donne une suite géométrique de raison $e^{-\lambda\Delta t}$.

© 2026 — Tous droits réservés

25. Carte mentale du chapitre



26. Glossaire des notations

Notation	Signification
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (u_n)	la suite (objet) ; u_n est son terme d'indice n
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$	(u_n) converge vers ℓ
(u_{2n}), (u_{2n+1})	suites extraites des rangs pairs, impairs
$\sum_{k=p}^{n} u_k$	$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$ ($n-p+1$ termes)
$n!$	$1 \times 2 \times \cdots \times n$, avec $0! = 1$
$f(I) \subset I$	I est stable par f
I.A.F.	inégalité des accroissements finis
$E(x)$	partie entière de x

27. Auto-évaluation

Je sais...	Oui	Pas encore
calculer terme général et sommes (arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique)	☐	☐
étudier le sens de variation et le caractère borné d'une suite	☐	☐
utiliser la définition de la limite, les opérations, lever une F.I.	☐	☐
appliquer comparaison, gendarmes, limite monotone	☐	☐
démontrer que deux suites sont adjacentes	☐	☐
étudier complètement une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ (stabilité, monotonie, limite)	☐	☐
majorer $\lvert u_n - \ell\rvert$ par l'I.A.F.	☐	☐
étudier une suite définie implicitement	☐	☐

© 2026 — Tous droits réservés

28. Pour aller plus loin — vers la CPGE

Astuce — Prolongements

- **Borne supérieure** : toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ a une borne supérieure ; c'est l'axiome qui démontre le théorème de la limite monotone.
- **Bolzano–Weierstrass** : de toute suite bornée on peut extraire une suite convergente.
- **Suites de Cauchy** : (u_n) converge si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists N,\ p, q \geq N \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \varepsilon$.
- **Césaro** : si $u_n \to \ell$, alors $\frac{u_1+\cdots+u_n}{n} \to \ell$ (réciproque fausse).
- **Récurrences linéaires d'ordre 2** $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$: équation caractéristique $r^2 = ar + b$ (Fibonacci : $F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$).
- **Séries numériques** : étude de $\sum u_n$ (critères de comparaison, de d'Alembert, de Leibniz).

© 2026 — Tous droits réservés