MATHS ÉLITES

Terminale — 2e Bac Sciences Mathématiques • Préparation Bac SM → CPGE

STAGE DE

# Mathématiques

N°1

*Analyse : fonctions primitives, dérivabilité et réciproques, théorèmes de Rolle et des accroissements finis, suites numériques.*

I **Fonctions primitives**

II **Dérivabilité et réciproques**

III **Rolle, T.A.F. et I.A.F.**

IV **Suites numériques**

**4** feuilles de route • **85** exercices • **10** problèmes de synthèse • **1** fiche de révision

**R. Abed**
Professeur Agrégé de Mathématiques

**Année scolaire 2026 / 2027**
mathselites.com

AVANT DE COMMENCER

# Introduction

Ce stage rassemble, en un seul livret, l'ensemble des documents de travail consacrés au **cœur de l'analyse du programme de 2e Bac Sciences Mathématiques** : le calcul de primitives, l'étude locale et globale des fonctions dérivables, les grands théorèmes qui en découlent (Rolle, accroissements finis) et leur exploitation dans l'étude des suites numériques.

Le stage s'ouvre sur les **primitives** : « remonter » de $f'$ à $f$ oblige à maîtriser parfaitement toutes les formules de dérivation, ce qui en fait un excellent échauffement calculatoire. On revient ensuite à la **dérivabilité** et aux fonctions réciproques, qui fournissent les outils théoriques ; le **théorème des accroissements finis** transforme alors une information sur $f'$ en inégalités sur $f$ ; ces inégalités servent enfin, dans les **suites numériques**, à encadrer des sommes, à contrôler la vitesse de convergence d'une suite récurrente ou à localiser la solution d'une équation.

## Objectifs du stage

- Consolider les définitions et les théorèmes *en vérifiant systématiquement leurs hypothèses* (de nombreux exercices « pièges » et « vrai ou faux » y sont consacrés).
- Acquérir des *méthodes-réflexes* : logigramme de recherche d'une primitive, fonction auxiliaire, encadrement par le T.A.F., plan d'étude d'une suite récurrente ou implicite.
- S'entraîner sur des énoncés de niveau Bac SM, puis sur des problèmes de synthèse de niveau concours (ENSAM, préparation CPGE).

## Organisation du livret

Le livret comporte **quatre parties**. Chacune s'ouvre par une page de garde, suivie d'une **feuille de route** (rappels de cours, méthodes, astuces et pièges à éviter), puis des documents d'exercices :

- **Partie I** — Fonctions primitives (1 série complète avec feuille de route des méthodes M1–M9) ;
- **Partie II** — Dérivabilité, fonctions réciproques et étude de fonctions (1 série) ;
- **Partie III** — Théorèmes de Rolle, des accroissements finis et I.A.F. (1 fiche de révision, 2 séries) ;
- **Partie IV** — Suites numériques (5 séries thématiques).

Les exercices sont, dans chaque série, rangés par difficulté croissante (indiquée par des étoiles) et accompagnés d'une durée indicative. Le livret ne contient que les **énoncés**.

## Conseils de travail

- Lire la *feuille de route* du chapitre *avant* d'attaquer les exercices, et y revenir dès qu'un exercice résiste.
- Chercher chaque exercice au brouillon dans la durée indiquée, puis rédiger proprement : la rédaction compte autant que le résultat.
- Citer précisément le théorème utilisé et vérifier *toutes* ses hypothèses (continuité sur le segment, dérivabilité sur l'ouvert, intervalle, ...).
- Contrôler les résultats : dériver une primitive obtenue, tester numériquement une limite ou un encadrement.

## Prérequis

Limites et continuité (T.V.I., théorème de la bijection, racines $n$-ièmes), formules de dérivation, trigonométrie, raisonnement par récurrence, suites arithmétiques et géométriques. Quelques exercices des séries sur les suites (séries n°1, 3, 4 et 5) font en outre appel aux fonctions ln et exp.

PROGRAMME DU STAGE

# Les notions à étudier

## I • Fonctions primitives

24 exercices + 4 problèmes

- **Définition et existence** : primitive sur un intervalle, existence pour une fonction continue, ensemble des primitives (une constante *par intervalle*), primitive vérifiant une condition donnée.
- **Méthodes de calcul** (M1–M9) : primitives usuelles et linéarité ; formes composées $u'(g' \circ u)$, $u'u^r$, $\dfrac{u'}{1+u^2}$ ; fractions rationnelles (sans logarithme) ; trigonométrie (linéarisation, puissances impaires, $1+\tan^2$, demi-angle) ; racines et puissances rationnelles ; « dériver pour primitiver ».
- **Propriétés** : parité et périodicité des primitives, fonctions définies par morceaux, fonction sans primitive (partie entière), fonction définie comme une primitive et son étude.
- **Applications** : primitiver des inégalités, équations résolues par primitivation, sommes $\sum$ et binôme de Newton, calcul de $\pi$, sin et cos comme limites de sommes.

## II • Dérivabilité, fonctions réciproques et étude de fonctions

7 exercices + 1 problème

- **Dérivabilité en un point** : taux d'accroissement, dérivabilité à droite et à gauche, demi-tangentes (dont demi-tangentes verticales), interprétation géométrique.
- **Dérivabilité sur un intervalle** : règles de calcul, dérivée d'une composée ; « même dérivée $\Rightarrow$ différence constante » *seulement sur un intervalle*.
- **Fonctions périodiques et parité** : réduction du domaine d'étude, étude d'une fonction trigonométrique, tangentes.
- **Fonction réciproque** : théorème de la bijection, dérivabilité de $f^{-1}$ et formule $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$, tangente à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$, symétrie des courbes, parité de la réciproque.
- **Fonctions de référence** : arctan, réciproque d'une restriction de cos, racines $n$-ièmes et leurs dérivées.
- **Étude complète** : limites, branches infinies, variations, extremums, tracé ; fonction définie par morceaux.

## III • Théorèmes de Rolle, T.A.F. et I.A.F.

fiche + 18 exercices + 4 problèmes

- **Extremums** : extremum local, condition nécessaire $f'(x_0) = 0$ en un point intérieur.
- **Théorème de Rolle** : énoncé, rôle de chaque hypothèse (contre-exemples), fonction auxiliaire, Rolle « en cascade ».
- **T.A.F. et I.A.F.** : encadrements (de arctan, de racines $n$-ièmes, de sin, cos), inégalité $|\arctan x - \arctan y| \leq |x-y|$.
- **Applications** : calcul de limites, dénombrement et localisation des racines d'une équation (T.V.I. + Rolle), approximation de $\pi$.
- **Prolongements** : formules de Taylor–Lagrange aux ordres 2 et 3, T.A.F. généralisé (Cauchy), suite récurrente contrôlée par l'I.A.F., polynômes de Legendre.

## IV • Suites numériques

36 exercices + 1 problème

### Série 1 — Calculs de limites

- Suites de référence ($q^n$, croissances comparées, $\sqrt[n]{a}$, factorielle), limites issues de nombres dérivés, gendarmes, limite de $f(u_n)$, inégalité de Bernoulli, suites $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$.

### Série 2 — Sommes, produits et encadrements

- Sommes usuelles et géométriques, télescopage (sommes et produits), encadrement de sommes par le T.A.F., produit de cosinus (formule de Viète), partie entière, questions de concours.

### Série 3 — Suites adjacentes et suites couplées

- Théorème des suites monotones, suites adjacentes, dichotomie, suites d'Archimède, série harmonique et constante d'Euler, itération de trois moyennes.

### Série 4 — Suites récurrentes $u_{n+1}=f(u_n)$

- Intervalle stable, monotonie, convergence, point fixe, sous-suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$, vitesse de convergence par l'I.A.F., nombre d'or et suite de Fibonacci, méthode de Héron.

### Série 5 — Suites implicites

- Suite définie par $f_n(u_n)=0$ : existence et unicité, localisation, monotonie par comparaison de $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$, limite et comportement asymptotique.

CONTENU DU LIVRET

# Sommaire

**Partie I** Fonctions primitives — page 6

➤ **Feuille de route** — Primitives — page 7
Rappels, méthodes, astuces et pièges à éviter

➤ **Série complète** — Fonctions primitives — page 9
Méthodes M1–M9, 24 exercices + 4 problèmes de synthèse • 19 pages

**Partie II** Dérivabilité, fonctions réciproques et étude de fonctions — page 28

➤ **Feuille de route** — Dérivabilité et réciproques — page 29
Rappels, méthodes, astuces et pièges à éviter

➤ **Série n°1** — Dérivabilité, fonctions réciproques et étude de fonctions — page 31
7 exercices + 1 problème de synthèse • 4 pages • 3 h 40

**Partie III** Théorèmes de Rolle, des accroissements finis et I.A.F. — page 35

➤ **Feuille de route** — Rolle et accroissements finis — page 36
Rappels, méthodes, astuces et pièges à éviter

➤ **Fiche de révision** — Rolle, T.A.F., I.A.F. — l'essentiel — page 37
2 pages

➤ **Série n°2** — Théorème de Rolle, accroissements finis et applications — page 39
8 exercices + 1 problème de synthèse • 4 pages • 3 h 50

➤ **Exercices et problèmes** — Théorèmes de Rolle, T.A.F. et I.A.F. — page 43
10 exercices gradués + 3 problèmes de synthèse • 5 pages

**Partie IV** Suites numériques — page 48

➤ **Feuille de route** — Suites numériques — page 49
Rappels, méthodes, astuces et pièges à éviter

➤ **Série n°1** — Calculs de limites — page 50
7 exercices • 4 pages • 2 h 30

➤ **Série n°2** — Sommes, produits et encadrements — page 54
8 exercices • 4 pages • 3 h 15

➤ **Série n°3** — Suites adjacentes et suites couplées — page 58
6 exercices • 4 pages • 2 h 50

➤ **Série n°4** — Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ — page 62
8 exercices • 4 pages • 3 h 50

➤ **Série n°5** — Suites implicites — page 66
7 exercices + 1 problème de synthèse • 5 pages • 4 h 35

**Ordre de travail conseillé**

Parties I → II → III → IV. Les séries 2, 3 et 4 de la partie IV réinvestissent directement le T.A.F. et l'I.A.F. de la partie III ; la série 5 s'appuie sur le théorème de la bijection revu dans la partie II.

PARTIE I

# Fonctions primitives

*Primitives usuelles • techniques de calcul • applications • sommes Σ*

## Contenu de cette partie


➤ **Feuille de route — Primitives** page 7
rappels, méthodes, astuces, pièges

➤ **Série complète — Fonctions primitives** page 9
Feuille de route M1–M9, 24 exercices + 4 problèmes de synthèse


## Conseil

Toujours préciser l'intervalle de travail, et toujours vérifier une primitive en la dérivant.

PARTIE I • FEUILLE DE ROUTE

# Fonctions primitives

## ✎ Rappels de cours

**Définition.** Soit $f$ définie sur un *intervalle* $I$. Une primitive de $f$ sur $I$ est une fonction $F$ dérivable sur $I$ telle que $F' = f$ sur $I$.

**Théorèmes.** Toute fonction *continue* sur un intervalle $I$ admet des primitives sur $I$. Si $F$ est l'une d'elles, les primitives de $f$ sur $I$ sont exactement les fonctions $x \mapsto F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Pour $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une *unique* primitive $G$ de $f$ sur $I$ telle que $G(x_0) = y_0$.

**Primitives usuelles**

| $f(x)$ | $F(x)$ | sur |
|---|---|---|
| $x^n \ \ (n \in \mathbb{N})$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{x^n} \ \ (n \geq 2)$ | $-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$ | $\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$ |
| $x^r \ \ (r \in \mathbb{Q} \ \setminus \{-1\})$ | $\frac{x^{r+1}}{r+1}$ | $]0, +\infty[$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x}$ | $]0, +\infty[$ |
| $\cos(ax+b),\ a \neq 0$ | $\frac{1}{a}\sin(ax+b)$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sin(ax+b),\ a \neq 0$ | $-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$ | $\mathbb{R}$ |
| $1 + \tan^2 x$ | $\tan x$ | $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ |
| $\frac{1}{a^2+x^2} \ \ (a > 0)$ | $\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$ | $\mathbb{R}$ |

**Formes composées** ($u$ dérivable)

| $f$ | $F$ | condition |
|---|---|---|
| $u'u^n$ | $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ | $n \in \mathbb{N}$ |
| $\frac{u'}{u^n}$ | $-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$ | $n \geq 2,\ u \neq 0$ |
| $u'u^r$ | $\frac{u^{r+1}}{r+1}$ | $r \in \mathbb{Q} \ \setminus \{-1\},\ u > 0$ |
| $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ | $2\sqrt{u}$ | $u > 0$ |
| $u'\cos u$ | $\sin u$ | |
| $u'\sin u$ | $-\cos u$ | |
| $\frac{u'}{1+u^2}$ | $\arctan u$ | |
| $u' \times (g' \circ u)$ | $g \circ u$ | cas général |

## ➤ Méthodes

**M1** **Forme composée.** Repérer une fonction $u$ dont la dérivée apparaît en facteur, *à une constante multiplicative près* : on multiplie et on divise par la constante manquante. Ex. : $x\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2}(2x)(x^2+1)^{1/2}$ a pour primitive $\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}$.

**M2** **Fraction rationnelle $\frac{N}{D}$.** Si $\deg N \geq \deg D$ : division euclidienne. Si $D = (x-a)^n$ : poser $t = x - a$ et développer $N$ suivant les puissances de $t$. Si $D = x^2 + px + q$ avec $\Delta < 0$ : forme canonique, puis arctan.

**M3** **Trigonométrie.** Puissance paire : linéariser ($\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$, $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$). Puissance impaire : $\sin^{2p+1} x \cos^m x = \sin x\,(1-\cos^2 x)^p \cos^m x$, somme de termes $u'u^k$. Produits : formules $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$, etc.

**M4** **Racines.** Faire apparaître $u'u^r$ : écrire $x = (x+1) - 1$ devant $\sqrt{x+1}$, multiplier par la quantité conjuguée.

**M5** **Dériver pour primitiver.** Pour $x\cos x$, $x\arctan x$, $(ax^2+bx+c)\sqrt{1+x}$… : dériver une forme proposée (ou cherchée a priori) et identifier les coefficients.

**M6** **Condition imposée.** Écrire $F = F_0 + c$ puis déterminer $c$ par $F(x_0) = y_0$ (ou par une limite imposée).

## ★ Astuces

★ Vérifier *systématiquement* le résultat en le dérivant : c'est rapide et cela détecte presque toutes les erreurs.

★ Artifices d'écriture : $1 = (1+x^2) - x^2$, $x^2 = (x^2+1) - 1$, $x^3 = x(x^2+1) - x$, $1 + \tan^2 x$ en facteur pour $\frac{1}{\cos^4 x} = (1+\tan^2 x)(1+\tan^2 x)$.

★ Demi-angle : $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$ et $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$.

★ Fonction définie par morceaux : chercher une primitive sur chaque intervalle, puis choisir les constantes pour *recoller continûment* ; ex. $x \mapsto \frac{1}{2}x|x|$ est une primitive de $|x|$ sur $\mathbb{R}$.

★ Si $f$ est continue et impaire sur $\mathbb{R}$, toutes ses primitives sont paires (dériver $x \mapsto F(-x)$).

### ✗ Pièges à éviter

- ✗ Oublier l'intervalle : sur $\mathbb{R}^*$, une primitive de $\frac{1}{x^2}$ est $-\frac{1}{x}+c_1$ sur $]-\infty,0[$ et $-\frac{1}{x}+c_2$ sur $]0,+\infty[$, *avec deux constantes indépendantes*.
- ✗ Croire qu'une primitive d'un produit (ou d'un quotient) est le produit (ou le quotient) des primitives.
- ✗ Oublier le facteur $\frac{1}{a}$ : une primitive de $\cos(3x)$ est $\frac{1}{3}\sin(3x)$, pas $\sin(3x)$.
- ✗ Utiliser $u^r$ avec $r$ non entier là où $u \leq 0$ : la racine $n$-ième d'un nombre négatif n'est pas définie dans notre cadre.
- ✗ Penser que $\frac{u'}{u}$ relève de la forme $u'u^r$ : c'est le cas $r=-1$, exclu (il conduit au logarithme).
- ✗ Croire que toute fonction admet des primitives : la partie entière n'en admet pas sur $[0,2]$. Croire que les primitives d'une fonction $T$-périodique sont $T$-périodiques : $x \mapsto x+\sin x$ est une primitive de $1+\cos x$.
- ✗ Si $f$ est paire, *une seule* de ses primitives est impaire : celle qui s'annule en $0$.

**Maths Elites**

2e année du Baccalauréat — Filière Sciences Mathématiques (A et B)

Année scolaire 2026 / 2027

SÉRIE D'EXERCICES — PRIMITIVES

# Fonctions primitives

**Primitives usuelles, techniques de calcul, applications et sommes $\Sigma$**

*Feuille de route des méthodes, 24 exercices et 4 problèmes de synthèse — énoncés*

| AUTEUR | NIVEAU | FILIÈRE | ANNÉE | SEMESTRE |
|---|---|---|---|---|
| R. Abed — Prof agrégé | 2e Bac | Sciences Math. | 2026 / 2027 | S1 |

**Rappel de cours**

La série s'ouvre sur une *feuille de route* qui organise les méthodes de calcul, suivie de 24 exercices et de 4 problèmes de synthèse. Le niveau de chaque exercice est indiqué uniquement par son nombre d'étoiles, de ★☆☆☆ à ★★★★ ; la durée indiquée est un repère de travail personnel. Sauf mention contraire, on donnera *une* primitive sur l'intervalle indiqué ; la vérification par dérivation est vivement conseillée. **Aucun exercice ne fait intervenir le logarithme ni l'exponentielle.**

## Feuille de route : comment calculer une primitive ?

Face à une fonction $f$ continue sur un intervalle $I$, on se pose les questions *dans cet ordre* ; la première réponse « oui » indique la méthode à appliquer (logigramme ci-dessous). On commence par la boîte à outils de base.

**Méthode — M1 — Primitives usuelles et linéarité**

Si $F$ et $G$ sont des primitives de $f$ et $g$ sur $I$, alors $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$.

| $f(x)$ | une primitive $F(x)$ | intervalle |
|---|---|---|
| $x^n \ \ (n \in \mathbb{N})$ | $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $\dfrac{1}{x^n} \ \ (n \geq 2)$ | $-\dfrac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}$ | $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ |
| $x^r \ \ (r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$ | $\dfrac{x^{r+1}}{r+1}$ | $]0, +\infty[$ |
| $\cos(ax+b) \ \ (a \neq 0)$ | $\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sin(ax+b) \ \ (a \neq 0)$ | $-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)$ | $\mathbb{R}$ |
| $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $\tan x$ | $]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$ |
| $\dfrac{1}{a^2+x^2} \ \ (a>0)$ | $\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}$ | $\mathbb{R}$ |

❑ **Logigramme de recherche d'une primitive**

**0.** Préciser l'intervalle $I$ sur lequel $f$ est continue.

↓ non

**1.** $f$ est-elle une combinaison linéaire de fonctions usuelles (éventuellement en $ax+b$) ? — oui → **M1** Tableau des primitives usuelles + linéarité.

↓ non

**2.** Voit-on un facteur $u'(x)$ devant une expression de $u(x)$ ? — oui → **M2** Formes composées $u' \times (g' \circ u)$.

↓ non

**3.** $f$ est-elle une fraction rationnelle ? — oui → **M3** Division euclidienne, puissances de $(x-a)$, forme canonique, arctangente.

↓ non

**4.** $f$ est-elle trigonométrique ? — oui → **M4** Linéariser, ou factoriser par $\sin x$, $\cos x$, $1+\tan^2 x$ ; demi-angle.

↓ non

**5.** $f$ contient-elle des racines ou des puissances rationnelles ? — oui → **M5** Faire apparaître $u'u^r$ : conjugué, $x = (x+a)-a$, $u=\sqrt{x}$…

↓ non

**6.** Sinon : produit $x^n \cos x$, $x^n \arctan x$… ? — oui → **M6** Dériver pour primitiver : forme a priori, dérivée d'un produit.

**Toujours :** vérifier en dérivant — ajouter une constante *par intervalle* — utiliser la condition imposée (**M7**).

*Les méthodes **M8** (comparaison) et **M9** (sommes $\Sigma$) servent dans les exercices d'application.*

## 1. Les méthodes détaillées (suite)

### Méthode — M2 — Formes composées : repérer $u$ et $u'$

On cherche une fonction $u$ dont la dérivée apparaît en facteur (à une constante multiplicative près, que l'on ajuste) :

| $f$ | $F$ | $f$ | $F$ |
|---|---|---|---|
| $u'u^r$ $(r \in \mathbb{Q}\setminus\{-1\}, u>0)$ | $\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$ | $u'\cos u$ | $\sin u$ |
| $\dfrac{u'}{u^2}$ $(u \neq 0)$ | $-\dfrac{1}{u}$ | $u'\sin u$ | $-\cos u$ |
| $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ $(u>0)$ | $2\sqrt{u}$ | $u'(1+\tan^2 u)$ | $\tan u$ |
| $\dfrac{u'}{\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ $(u>0)$ | $n\sqrt[n]{u}$ | $\dfrac{u'}{1+u^2}$ | $\arctan u$ |

**Réflexe :** le degré du numérateur est-il « un de moins » que celui de ce qui est sous la puissance ? Si oui, $u$ est ce qui est sous la puissance.

### Méthode — M3 — Fractions rationnelles $\dfrac{N(x)}{D(x)}$ (sans logarithme)

1. Si $\deg N \geq \deg D$ : **division euclidienne** $N = DQ + R$, d'où $\dfrac{N}{D} = Q + \dfrac{R}{D}$ avec $\deg R < \deg D$.
2. Si $D = (x-a)^n$ : écrire $N$ suivant les puissances de $(x-a)$ (poser $t = x-a$), puis utiliser


© 2026 — Tous droits réservés

$\dfrac{1}{(x-a)^m}$, $m \geq 2$.

3. Si $D = (x^2+px+q)^n$ avec $\Delta < 0$ : écrire $N = \alpha(2x+p) + \beta$ ; la partie $\dfrac{\alpha(2x+p)}{D}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u^n}$ $(n \geq 2)$, et la partie $\dfrac{\beta}{D}$ se traite par la **forme canonique** $x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2 + c^2$, qui conduit à l'arctangente $(n=1)$ ou à la fonction $G$ du problème 1 $(n=2)$.
4. Artifices utiles : $1 = (1+x^2) - x^2$, $\quad x^2 = (x^2+1) - 1$, $\quad x^3 = x\,(x^2+1) - x$.

## Méthode — M4 — Fonctions trigonométriques

1. **Puissance paire** de sin ou cos : *linéariser* avec $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$, $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$, $\sin a \cos a = \frac{\sin 2a}{2}$.
2. **Produits** : $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$, $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$, $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$.
3. **Puissance impaire** : $\sin^{2p+1} x \cos^m x = \sin x\,(1-\cos^2 x)^p \cos^m x$ (on se ramène à des $u'u^r$ avec $u = \cos x$) ; de même en échangeant sin et cos.
4. **Tangente** : factoriser par $1+\tan^2 x$ ; par exemple $\dfrac{1}{\cos^4 x} = (1+\tan^2 x)(1+\tan^2 x)$.
5. **Demi-angle** : $1+\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$, $1-\cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$, et avec $t = \tan \frac{x}{2}$ : $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

## Méthode — M5 — Racines et puissances rationnelles

- Écrire toute racine comme puissance : $\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$ sur $]0, +\infty[$.
- **Décaler** : $x = (x+a) - a$ ou $x^3 = x\,(x^2+1) - x$, pour faire apparaître $u'u^r$.
- **Quantité conjuguée** : $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$.
- **Arctangente cachée** : $\dfrac{u'}{1+u^2}$ avec $u = \sqrt{x}$, $u = x^{3/2}$, $u = \sqrt[3]{x}$…
- **Factoriser sous la racine** : pour $x > 0$, $\sqrt{x^2+1} = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$.

## Méthode — M6 — Dériver pour primitiver

- **Forme a priori** : pour $f(x) = P(x)\cos x$ ($P$ polynôme de degré $n$), chercher $F(x) = A(x)\sin x + B(x)\cos x$ avec $\deg A, \deg B \leq n$, dériver et identifier.
- **Dérivée d'un produit** : de $(uv)' = u'v + uv'$, on déduit :

  si $H$ est une primitive de $uv'$, alors $uv - H$ est une primitive de $u'v$.
- On peut aussi dériver une fonction « candidate » proposée par l'énoncé et réorganiser le résultat.

## Méthode — M7 — Conditions, intervalles et recollements

- Sur un *intervalle*, deux primitives diffèrent d'une constante ; sur une réunion d'intervalles disjoints, il y a *une constante par intervalle*.


© 2026 — Tous droits réservés

- La condition $F(x_0) = y_0$ (ou une limite imposée) détermine la constante.
- **Recollement en $a$** : on définit $F$ par morceaux, on impose la continuité en $a$, puis on prouve la dérivabilité en $a$ (taux d'accroissement, ou : si $F$ est continue en $a$ et $F'(x) \to \ell$ quand $x \to a$, alors $F'(a) = \ell$ — conséquence du TAF).

**Méthode — M8 — Comparer des fonctions par leurs dérivées**

Si $u$ et $v$ sont dérivables sur $[a, b]$, avec $u(a) = v(a)$ et $u' \leq v'$ sur $[a, b]$, alors $u \leq v$ sur $[a, b]$ (car $v - u$ est croissante et nulle en $a$).
**Usage :** « primitiver une inégalité » ; en itérant, on obtient des encadrements polynomiaux de sin, cos, arctan...

**Méthode — M9 — Primitives et sommes $\Sigma$**

a) **Dériver ou primitiver une somme finie terme à terme** : $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$ ; on fixe la constante en $x = 0$, puis on évalue en un point bien choisi ($x = 1$, $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$...).

b) **Encadrement par le TAF** : si $f$ est continue et décroissante sur $[k, k+1]$ et $F$ est une primitive de $f$, alors

$$f(k+1) \leq F(k+1) - F(k) \leq f(k)\,;$$

en sommant, les termes $F(k+1)-F(k)$ se *télescopent* : $\sum_{k=p}^{n-1} (F(k+1)-F(k)) = F(n)-F(p)$.

c) **Télescopage par une primitive** : écrire le terme général sous la forme $F(k+1) - F(k)$ (souvent avec $F = \arctan$).

**Astuce — Équations du type $f' = \varphi(f)$**

Lire M2 « à l'envers » : si $f$ ne s'annule pas, $\left(-\frac{1}{f}\right)' = \frac{f'}{f^2}$ ; $(\arctan f)' = \frac{f'}{1+f^2}$ ; si $f > 0$, $(f^2)' = 2ff'$ et $(2\sqrt{f})' = \frac{f'}{\sqrt{f}}$.

**Piège à éviter**

✗ Oublier l'intervalle : $x \mapsto -\frac{1}{x}$ n'est pas « la » primitive de $\frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$ (voir exercice 5).

✗ Oublier le facteur d'ajustement : une primitive de $\cos(3x)$ est $\frac{1}{3}\sin(3x)$, pas $\sin(3x)$.

✗ Primitiver un produit en multipliant des primitives : c'est faux en général (exercice 7).

✗ Recoller deux expressions sans vérifier la continuité *et* la dérivabilité au point de raccord (problème 3).


© 2026 — Tous droits réservés

# Primitives usuelles et premières techniques

## Exercice 1 — Primitives immédiates (20 min) ★☆☆☆ Basique

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle $I$ indiqué.

1. $f_1(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$, $I = \mathbb{R}$ ;
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{2}{x^2}$, $I = ]0, +\infty[$ ;
3. $f_3(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $I = ]0, +\infty[$ ;
4. $f_4(x) = \sqrt[3]{x}$, $I = ]0, +\infty[$ ;
5. $f_5(x) = \cos(2x) - 3\sin\dfrac{x}{2}$, $I = \mathbb{R}$ ;
6. $f_6(x) = 1 + \tan^2(3x)$, $I = \left]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right[$ ;
7. $f_7(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{x^2+9}$, $I = \mathbb{R}$ ;
8. $f_8(x) = (2x-1)^5$, $I = \mathbb{R}$.

## Exercice 2 — Reconnaître une forme $u' \times (g' \circ u)$ (30 min) ★☆☆☆ Basique

Déterminer une primitive de $f$ sur l'intervalle $I$ (on précisera la fonction $u$ utilisée).

1. $f(x) = x(x^2+1)^3$, $I = \mathbb{R}$ ;
2. $f(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x+5)^2}$, $I = \mathbb{R}$ ;
3. $f(x) = x^2\sqrt{x^3+1}$, $I = ]-1, +\infty[$ ;
4. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $I = \mathbb{R}$ ;
5. $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$, $I = \mathbb{R}$ ;
6. $f(x) = \sin x \cos^3 x$, $I = \mathbb{R}$ ;
7. $f(x) = \tan x\,(1+\tan^2 x)$, $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ;
8. $f(x) = \dfrac{\cos x}{(2+\sin x)^2}$, $I = \mathbb{R}$ ;
9. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$, $I = ]0, +\infty[$ ;
10. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}$, $I = ]0, +\infty[$.


© 2026 — Tous droits réservés

## Exercice 3 — L'arctangente cachée ( 25 min ) ★★☆☆ Classique

Déterminer une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+8}$ ;
2. $f(x) = \dfrac{1}{4x^2+1}$ ;
3. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^4}$ ;
4. $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ ;
5. $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2+1}$ ;
6. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\,(1+\arctan^2 x)}$.

## Exercice 4 — Primitives trigonométriques ( 30 min ) ★★☆☆ Classique

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes (sur $\mathbb{R}$, sauf indication contraire).

1. $f(x) = \cos^2 x$ ;
2. $f(x) = \sin^4 x$ ;
3. $f(x) = \sin^3 x \cos^2 x$ ;
4. $f(x) = \sin x \sin 3x$ ;
5. $f(x) = \cos^5 x$ ;
6. $f(x) = \tan^4 x$, $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

*Indication pour 6 : écrire* $\tan^4 x = \tan^2 x\,(1+\tan^2 x) - \tan^2 x$.

## Exercice 5 — Conditions initiales et intervalles ( 20 min ) ★★☆☆ Important

1. Déterminer la primitive $F$ de $f : x \mapsto \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 1$.
2. Déterminer la primitive $G$ de $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$.
3. On considère $h : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$.
   - **(a)** Déterminer toutes les fonctions $H$ dérivables sur $\mathbb{R}^*$ telles que $H' = h$ sur $\mathbb{R}^*$.
   - **(b)** En déduire la fonction $H$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$ telle que $H' = h$, $H(1) = 0$ et $H(-1) = 0$.
   - **(c)** Existe-t-il un réel $c$ tel que $H(x) = -\dfrac{1}{x} + c$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ ? Commenter.

## Exercice 6 — Dériver pour primitiver ( 30 min ) ★★☆☆ Classique

1. Calculer la dérivée de $x \mapsto x \sin x$. En déduire une primitive de $x \mapsto x \cos x$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la dérivée de $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. En déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer la dérivée de $x \mapsto (1+x^2)\arctan x$. En déduire une primitive de $x \mapsto x \arctan x$ sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer trois réels $a$, $b$, $c$ tels que $F : x \mapsto (ax^2+bx+c)\sqrt{1+x}$ soit une primitive de


© 2026 — Tous droits réservés

$f : x \mapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x}}$ sur $]-1,+\infty[$.

## Exercice 7 — Vrai ou faux ? (justifier) ( 25 min ) ★★☆☆ Important

Pour chaque affirmation, répondre par *vrai* ou *faux* en justifiant (démonstration ou contre-exemple).

1. Toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
2. Si $F$ et $G$ sont deux primitives d'une même fonction $f$ sur $\mathbb{R}^*$, alors $F-G$ est constante sur $\mathbb{R}^*$.
3. Si $F$ et $G$ sont des primitives de $f$ et $g$ sur $\mathbb{R}$, alors $FG$ est une primitive de $fg$ sur $\mathbb{R}$.
4. Si $f$ est continue et impaire sur $\mathbb{R}$, alors toutes ses primitives sont paires.
5. Si $f$ est continue et paire sur $\mathbb{R}$, alors toutes ses primitives sont impaires.
6. Si $f$ est continue et $2\pi$-périodique sur $\mathbb{R}$, alors ses primitives sont $2\pi$-périodiques.

## Exercice 8 — Primitives de fonctions définies par morceaux ( 30 min ) ★★★☆ Important

1. Montrer que $F : x \mapsto \dfrac{1}{2}x\,|x|$ est une primitive de $x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$ (on étudiera soigneusement la dérivabilité en $0$).
2. Soit $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=1$ si $|x|\leq 1$ et $g(x)=x^2$ si $|x|>1$.
   (a) Vérifier que $g$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer la primitive $G$ de $g$ sur $\mathbb{R}$ telle que $G(0)=0$ (on vérifiera la dérivabilité de $G$ en $1$ et en $-1$).
3. Déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \sqrt{|x|}$ qui s'annule en $0$.
4. Montrer que la fonction partie entière $E$ n'admet pas de primitive sur $[0,2]$.

## Exercice 9 — Primitives et racines $n$-ièmes ( 30 min ) ★★★☆ Classique

1. Déterminer une primitive de $x \mapsto x\sqrt[3]{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f(x)=x\sqrt{x+1}$ sur $I=[-1,+\infty[$.
   (a) En écrivant $x=(x+1)-1$, déterminer une fonction $F$ telle que $F'=f$ sur $]-1,+\infty[$.
   (b) Étudier la dérivabilité de $F$ à droite en $-1$ et conclure que $F$ est une primitive de $f$ sur $I$.
3. Plus généralement, pour $n\geq 2$, déterminer les primitives de $x \mapsto x\sqrt[n]{x+1}$ sur $]-1,+\infty[$.
4. Montrer que, pour tout $x>0$, $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$, puis déterminer une primitive de cette fonction sur $]0,+\infty[$.


© 2026 — Tous droits réservés

## Exercice 10 — Primitives, binôme de Newton et sommes ( 25 min ) ★★★☆ Original

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, x^k$.

1. Soit $f(x) = \sum_{k=1}^{n} k\, C_n^k\, x^{k-1}$. Montrer que $x \mapsto (1+x)^n$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$, puis en déduire $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\, C_n^k$.

2. On pose $F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}\, x^{k+1}$ et $G(x) = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1}$.

   (a) Montrer que $F$ et $G$ sont deux primitives sur $\mathbb{R}$ d'une même fonction, que l'on précisera.

   (b) En déduire que $F = G$, puis la valeur de $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}$.

## Exercice 11 — Une fonction définie comme une primitive ( 45 min ) ★★★★ Important

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$.

1. Justifier l'existence et l'unicité d'une primitive $F$ de $f$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$. (*On ne cherchera pas à exprimer $F$.*)

2. Montrer que $F$ est impaire. (*On pourra considérer $x \mapsto -F(-x)$.*)

3. Étudier les variations et la convexité de $F$ ; préciser la tangente à sa courbe en $O$.

4. Montrer que, pour tout $x \geq 0$ : $x - \frac{x^5}{5} \leq F(x) \leq x$. En déduire $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x}$ et que $F(1) \geq \frac{4}{5}$.

5. (a) Montrer que, pour tout réel $t$ : $2(1+t^4) \geq (1+t^2)^2$.

   (b) En déduire que, pour tout $x \geq 0$ : $F(x) \leq 2\arctan x$.

   (c) Montrer que $F$ admet une limite finie $\ell$ en $+\infty$, avec $\frac{4}{5} \leq \ell \leq \pi$.

6. Montrer que $F$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.


© 2026 — Tous droits réservés

# Techniques de calcul

## Exercice 12 — Fractions rationnelles sans logarithme ( 40 min ) ★★☆☆ Méthode M3

On note $G$ la primitive sur $\mathbb{R}$ de $g : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$ qui s'annule en $0$ ; on l'établit au problème 1 : $G(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{1+x^2} + \arctan x\right)$.
Déterminer une primitive de $f$ sur l'intervalle $I$ indiqué.

1. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2+1}$, $I = \mathbb{R}$ ;
2. $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^4}$, $I = ]-1, +\infty[$ ;
3. $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)^4}$, $I = ]1, +\infty[$ ;
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2(x^2+1)}$, $I = ]0, +\infty[$ ;
5. $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}$, $I = \mathbb{R}$ ;
6. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x^2+1)^3}$, $I = \mathbb{R}$ ;
7. $f(x) = \dfrac{2x+3}{(x^2+2x+2)^2}$, $I = \mathbb{R}$.

*Indications : 2. poser $t = x+1$ ; 6. écrire $x^3 = x(x^2+1) - x$ ; 7. écrire $2x+3 = (2x+2)+1$ et utiliser $G$.*

## Exercice 13 — Trigonométrie : linéariser, factoriser, demi-angle ( 40 min ) ★★☆☆ Méthode M4

Déterminer une primitive de $f$ sur l'intervalle $I$ indiqué.

1. $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$, $I = \mathbb{R}$ ;
2. $f(x) = \cos x \cos 2x \cos 3x$, $I = \mathbb{R}$ ;
3. $f(x) = \dfrac{1}{\cos^4 x}$, $I = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ;
4. $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{(1+\cos^2 x)^2}$, $I = \mathbb{R}$ ;
5. $f(x) = \cos^4 x \, \sin^3 x$, $I = \mathbb{R}$ ;
6. $f(x) = \dfrac{1}{1+\cos x}$, $I = ]-\pi, \pi[$ ;
7. $f(x) = \dfrac{1}{1+\sin x}$, $I = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ ;
8. $f(x) = \dfrac{\cos x - \sin x}{(\cos x + \sin x)^3}$, $I = ]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[$.

*Indication pour 7 : $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, puis utiliser $1 + \cos a = 2\cos^2 \frac{a}{2}$.*


© 2026 — Tous droits réservés

## Exercice 14 — Racines et changements d'écriture ( 35 min ) ★★★☆ Méthode M5

Déterminer une primitive de $f$ sur l'intervalle $I$ indiqué (on précisera la fonction $u$ utilisée).

1. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$, $I = ]0, +\infty[$ ;
2. $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$, $I = \mathbb{R}$ ;
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$, $I = ]0, +\infty[$ ;
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x^3}$, $I = ]0, +\infty[$ ;
5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}\,(1+\sqrt[3]{x^2})}$, $I = ]0, +\infty[$ ;
6. $f(x) = x^5\sqrt{1+x^3}$, $I = ]-1, +\infty[$.

*Indications : 3. pour $x > 0$, $x^2\sqrt{x^2+1} = x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ ; 4. $x^3 = (x^{3/2})^2$ ; 6. $x^5 = x^2 \cdot x^3$ et $x^3 = (1+x^3) - 1$.*

## Exercice 15 — Puissances, binôme et somme Σ ( 45 min ) ★★★☆ Méthode M9

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer, sous forme d'une somme Σ, une primitive de $f$ sur l'intervalle $I$ indiqué.

1. $f(x) = x^n\sqrt{1-x}$, $I = ]-\infty, 1]$ (*écrire* $x = 1-(1-x)$) ;
2. $f(x) = x^{2n+1}\sqrt{1+x^2}$, $I = \mathbb{R}$ (*écrire* $x^{2n+1} = x\,((1+x^2)-1)^n$) ;
3. $f(x) = x^{3n+2}\,\sqrt[3]{1+x^3}$, $I = [-1, +\infty[$ ;
4. $f(x) = \sin^{2n+1}x$, $I = \mathbb{R}$ (*écrire* $\sin^{2n+1}x = \sin x\,(1-\cos^2 x)^n$) ;
5. $f(x) = \dfrac{1}{\cos^{2n+2}x}$, $I = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (*écrire* $\dfrac{1}{\cos^{2n+2}x} = (1+\tan^2 x)(1+\tan^2 x)^n$).

*Contrôle : pour $n = 1$, retrouver dans 5 la primitive de $\dfrac{1}{\cos^4 x}$ obtenue à l'exercice 13.*

## Exercice 16 — Dériver et primitiver une somme finie ( 50 min ) ★★★☆ Méthode M9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

### A — Somme géométrique

1. Rappeler, pour $x \neq 1$, l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$. En dérivant, montrer que pour $x \neq 1$ :

$$\sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$, puis la limite de cette somme quand $n \to +\infty$.

### B — Binôme de Newton

On pose $F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}\,x^{k+1}$ ; on a montré (exercice 10) que $F(x) = \dfrac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1}$.

3. En évaluant $F$ en un point bien choisi, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\,C_n^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$.


© 2026 — Tous droits réservés

**4.** Soit $H$ la primitive sur $\mathbb{R}$ de $h : x \mapsto x(1+x)^n$ qui s'annule en $0$.

**(a)** Exprimer $H(x)$ sous forme d'une somme $\Sigma$ (en développant $(1+x)^n$).

**(b)** Exprimer $H(x)$ sans $\Sigma$ (en écrivant $x = (1+x) - 1$).

**(c)** En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, C_n^k}{k+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

**5.** Soit $K$ la primitive de $F$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $0$. Montrer que

$$K(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{(k+1)(k+2)}\, x^{k+2} = \frac{(1+x)^{n+2} - 1 - (n+2)x}{(n+1)(n+2)},$$

et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{(k+1)(k+2)}$.

**6.** En dérivant deux fois (on pourra considérer $x \mapsto x\big[(1+x)^n\big]'$), montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\, C_n^k = n(n+1)\, 2^{n-2}$.

## Exercice 17 — Dériver pour primitiver ( 45 min ) ★★★☆ Méthode M6

**1.** Déterminer trois réels $a$, $b$, $c$ tels que $F : x \mapsto (ax^2 + b)\sin x + c\, x \cos x$ soit une primitive de $x \mapsto x^2 \cos x$ sur $\mathbb{R}$.

**2.** En cherchant $F$ sous la forme $F(x) = A(x)\sin x + B(x)\cos x$, où $A$ et $B$ sont des polynômes, déterminer une primitive de $x \mapsto x^3 \cos x$ sur $\mathbb{R}$.

**3.** Linéariser $\sin^2 x$, puis déterminer une primitive de $x \mapsto x \sin^2 x$ sur $\mathbb{R}$ (*on cherchera une primitive de* $x \mapsto x\cos 2x$ *sous la forme* $(\alpha x + \beta)\sin 2x + \gamma \cos 2x$).

**4. (a)** Calculer la dérivée de $x \mapsto \dfrac{x^4 - 1}{4} \arctan x$.

**(b)** En déduire une primitive de $x \mapsto x^3 \arctan x$ sur $\mathbb{R}$.

**5. (a)** Calculer la dérivée de $x \mapsto \dfrac{\arctan x}{1 + x^2}$.

**(b)** En utilisant la fonction $G$ de l'exercice 12, en déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{x \arctan x}{(1+x^2)^2}$ sur $\mathbb{R}$.


© 2026 — Tous droits réservés

# Applications

## Exercice 18 — Trois applications concrètes ( 40 min )

★★☆☆ Application

### A — Cinématique

Un mobile se déplace sur un axe ; à l'instant $t \geq 0$ (en s), son accélération est $a(t) = \dfrac{2}{(1+t)^3}$. À l'instant $t = 0$, sa vitesse est nulle et son abscisse vaut $1$.

1. Déterminer la vitesse $v(t)$. Montrer que $v$ est croissante et majorée, et calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$.
2. Déterminer l'abscisse $x(t)$, puis montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} \big(x(t) - t\big) = 0$. Interpréter.

### B — Une courbe définie par sa dérivée seconde

On cherche une fonction $f$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f''(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$, $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

3. Calculer la dérivée de $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et en déduire $f'$, puis $f$.
4. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y = x - 1$ comme asymptote en $+\infty$, et préciser la position relative. Que se passe-t-il en $-\infty$ ?

### C — Remplissage d'un réservoir

Un réservoir contient $10$ litres à l'instant $t = 0$ (en min). Il est alimenté avec un débit $d(t) = \dfrac{40}{(t+2)^2}$ (en L/min) ; le volume $V(t)$ vérifie $V'(t) = d(t)$.

5. Déterminer $V(t)$. Montrer que le volume reste toujours inférieur à une valeur que l'on précisera.
6. Au bout de combien de temps le réservoir contient-il $25$ litres ?


© 2026 — Tous droits réservés

## Exercice 19 — Primitiver des inégalités ( 50 min ) ★★★☆ Méthode M8

1. *Lemme.* Soient $u$, $v$ deux fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ telles que $u(0) = v(0)$ et $u'(x) \leq v'(x)$ pour tout $x \geq 0$. Montrer que $u(x) \leq v(x)$ pour tout $x \geq 0$.
2. En partant de l'inégalité $\cos t \leq 1$ et en appliquant le lemme quatre fois, établir que, pour tout $x \geq 0$ :
$$\sin x \leq x, \qquad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x, \qquad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x, \qquad \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$
3. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ (*on traitera d'abord $x \to 0^+$, puis on utilisera la parité*).
4. **(a)** Montrer que, pour tout réel $t$ : $1 - t^2 \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1 - t^2 + t^4$.
   **(b)** En déduire que, pour tout $x \geq 0$ : $x - \dfrac{x^3}{3} \leq \arctan x \leq x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5}$.
   **(c)** Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x - x}{x^3}$, puis donner une valeur approchée de $\arctan \dfrac{1}{10}$ à $10^{-5}$ près.

## Exercice 20 — Équations résolues par primitivation ( 50 min ) ★★★☆ Application

*On s'appuiera sur l'astuce « $f' = \varphi(f)$ » de la feuille de route.*

1. Soit $f$ une fonction dérivable sur $I = ]-\infty, 1[$, ne s'annulant pas sur $I$, telle que $f' = f^2$ sur $I$ et $f(0) = 1$.
   **(a)** Calculer la dérivée de $-\dfrac{1}{f}$ sur $I$.
   **(b)** En déduire l'expression de $f$, puis vérifier que la fonction obtenue convient.
2. Déterminer la fonction $f$ dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ telle que $f' = 1 + f^2$ et $f(0) = 0$ (*on étudiera* $\arctan \circ f$).
3. Déterminer la fonction $f$ dérivable sur $]-1, 1[$, ne s'annulant pas, telle que $f'(x) = 2x\, f(x)^2$ pour tout $x$ et $f(0) = 1$.
4. Déterminer la fonction $f$ dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x)f'(x) = x$ pour tout $x$ et $f(0) = 1$.
5. On cherche les fonctions $f$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tous réels $x$ et $y$ : $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$.
   **(a)** Calculer $f(0)$.
   **(b)** En dérivant par rapport à $x$ (avec $y$ fixé), montrer que $f'(y) = f'(0) + 2y$ pour tout réel $y$.
   **(c)** Déterminer toutes les fonctions $f$ solutions.


© 2026 — Tous droits réservés

# Primitives et sommes $\Sigma$

## Exercice 21 — Binôme de Newton et racines $n$-ièmes ( 30 min ) ★★★☆ Classique

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les primitives de la fonction $f$ sur $I$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = x^n \sqrt[3]{1+x}$, $I = [-1, +\infty[$ ;
2. $f(x) = x^{2027} \sqrt[n]{1+x}$, $I = [-1, +\infty[$ (ici $n \geq 2$).

*Indication : écrire $x = (1+x) - 1$ et développer $x^n = \big((1+x)-1\big)^n$ par la formule du binôme ; on vérifiera la dérivabilité à droite en $-1$ de la primitive obtenue.*

## Exercice 22 — Arctangente et sommes télescopiques ( 45 min ) ★★★☆ Original

1. Soit $b \geq 0$. On pose, pour $x \geq 0$ : $\varphi(x) = \arctan \dfrac{x-b}{1+bx}$.

   (a) Montrer que $\varphi$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $\varphi'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

   (b) En déduire que, pour tous réels $a \geq 0$ et $b \geq 0$ : $\arctan a - \arctan b = \arctan \dfrac{a-b}{1+ab}$.

2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ : $\arctan \dfrac{1}{k^2+k+1} = \arctan(k+1) - \arctan k$.

   En déduire $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan \frac{1}{k^2+k+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

3. Calculer de même $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{2}{k^2}$ et sa limite.

4. Trouver une suite $(a_k)$ telle que $\arctan \dfrac{1}{2k^2} = \arctan a_k - \arctan a_{k-1}$ pour $k \geq 1$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{1}{2k^2}$.


© 2026 — Tous droits réservés

## Exercice 23 — Une identité binomiale démontrée par primitivation ( 50 min ) ★★★★ Original

Pour $p, m \in \mathbb{N}$, on note $P_{p,m}$ la primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x^p(1-x)^m$ qui s'annule en $0$, et l'on pose $J(p,m) = P_{p,m}(1)$.

1. En développant $(1-x)^m$, montrer que $J(p,m) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k\, C_m^k}{p+k+1}$.
2. Calculer $J(p,0)$.
3. Soit $m \geq 1$. Calculer la dérivée de $x \mapsto x^{p+1}(1-x)^m$ et en déduire que, pour tout réel $x$ :
$$x^{p+1}(1-x)^m = (p+1)\, P_{p,m}(x) - m\, P_{p+1,m-1}(x).$$
4. En déduire que $J(p,m) = \dfrac{m}{p+1}\, J(p+1, m-1)$, puis, par récurrence sur $m$, que
$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k\, C_m^k}{p+k+1} = \frac{p!\; m!}{(p+m+1)!}.$$
5. Application : calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k\, C_m^k}{k+1}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, C_n^k}{n+k+1}$, et vérifier la cohérence avec l'exercice 16.

## Exercice 24 — Encadrer une somme à l'aide d'une primitive ( 60 min ) ★★★★ Important

1. *Lemme.* Soit $p \in \mathbb{N}$, $f$ une fonction continue et décroissante sur $[p, +\infty[$ et $F$ une primitive de $f$ sur cet intervalle.
   (a) À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que pour tout entier $k \geq p$ : $f(k+1) \leq F(k+1) - F(k) \leq f(k)$.
   (b) En déduire que, pour tout entier $n > p$ : $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} f(k) \leq F(n) - F(p) \leq \sum_{k=p}^{n-1} f(k)$.
   (c) Énoncer le résultat analogue lorsque $f$ est croissante.
2. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Montrer que $2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n \leq 2\sqrt{n} - 1$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$.
3. Montrer que $\dfrac{2}{3}\, n\sqrt{n} \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leq \frac{2}{3}\Big((n+1)\sqrt{n+1} - 1\Big)$, et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.
4. On pose $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k^2}$. Montrer que $\arctan(n+1) \leq w_n \leq 1 + \arctan n$, puis que la suite $(w_n)$ converge vers une limite $\ell$ telle que $\dfrac{\pi}{2} \leq \ell \leq 1 + \dfrac{\pi}{2}$.
5. On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$. En appliquant le lemme à $x \mapsto \dfrac{n}{n^2+x^2}$ sur $[0, n]$ ($n$ fixé),


© 2026 — Tous droits réservés

montrer que

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2n} \leq u_n \leq \frac{\pi}{4}, \qquad \text{puis} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{4}.$$

6. Montrer que, pour tout $n \geq 1$ : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$. En déduire que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)$ converge.

# Problèmes de synthèse

## Problème 1 — Une primitive de $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$ ( 50 min ) ★★★☆ Important

### Partie A — Calcul d'une primitive

1. Montrer que, pour tout réel $x$ : $\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)' = \dfrac{2}{(1+x^2)^2} - \dfrac{1}{1+x^2}$.

2. En déduire que $G : x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{1+x^2} + \arctan x\right)$ est la primitive de $g : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $0$.

### Partie B — Étude de $G$

3. Étudier la parité de $G$, ses variations et ses limites en $\pm\infty$.

4. Calculer $G''(x)$ ; étudier la convexité de $G$ et préciser le point d'inflexion et la tangente en ce point.

5. Calculer $G(1)$.

6. Montrer que $G$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle $J$ à préciser, et calculer $(G^{-1})'\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{\pi}{8}\right)$.

### Partie C — Un encadrement

7. Montrer que, pour tout $t \geq 0$ : $(1+t)^2(1-2t) \leq 1$, puis que pour tout réel $x$ : $1 - 2x^2 \leq \dfrac{1}{(1+x^2)^2} \leq 1$.

8. En déduire que, pour tout $x \geq 0$ : $x - \dfrac{2}{3}x^3 \leq G(x) \leq x$, puis la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{G(x)}{x}$.

## Problème 2 — Calcul de $\pi$ par des primitives successives ( 60 min ) ★★★★ Original

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

### Partie A — Un lemme de comparaison

1. Soient $a > 0$ et $u$, $v$ deux fonctions dérivables sur $[0, a]$ telles que $u(0) = v(0) = 0$ et, pour tout $x \in [0, a]$, $|u'(x)| \leq v'(x)$. Montrer que, pour tout $x \in [0, a]$, $|u(x)| \leq v(x)$. (*On étudiera $v - u$ et $v + u$.*)

### Partie B — Approximation de arctan


© 2026 — Tous droits réservés

2. Montrer que, pour tout réel $t$ : $\dfrac{1}{1+t^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} + \dfrac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}$.

3. On pose $\varphi_n(x) = \arctan x - P_n(x)$. Calculer $\varphi_n'(x)$ et montrer que $|\varphi_n'(x)| \leq x^{2n+2}$.

4. En déduire que, pour tout $x \geq 0$ : $\left|\arctan x - P_n(x)\right| \leq \dfrac{x^{2n+3}}{2n+3}$.

### Partie C — Deux calculs de $\pi$

5. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} = \dfrac{\pi}{4}$ (*formule de Leibniz*). Combien de termes faut-il pour garantir une erreur inférieure à $10^{-3}$ sur $\frac{\pi}{4}$ par cette majoration ?

6. On admet la formule de Machin : $\dfrac{\pi}{4} = 4\arctan\dfrac{1}{5} - \arctan\dfrac{1}{239}$. Montrer que

$$\left|\pi - \left(16\,P_3\left(\tfrac{1}{5}\right) - 4\,P_0\left(\tfrac{1}{239}\right)\right)\right| \leq \frac{16}{9\cdot 5^9} + \frac{4}{3\cdot 239^3} < 1{,}1\times 10^{-6}.$$

Comparer l'efficacité des deux méthodes.

## Problème 3 — Une primitive de $\dfrac{1}{2+\cos x}$ sur $\mathbb{R}$ tout entier (70 min) ★★★★ Original

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2+\cos x}$ ; elle est continue, paire et $2\pi$-périodique.

### Partie A — Une primitive sur $]-\pi,\pi[$

1. Montrer que, pour tout $x \in ]-\pi,\pi[$, en posant $t = \tan\dfrac{x}{2}$ : $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $2+\cos x = \dfrac{3+t^2}{1+t^2}$.

2. On pose, pour $x \in ]-\pi,\pi[$ : $F_0(x) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan\dfrac{x}{2}\right)$. Montrer que $F_0' = f$ sur $]-\pi,\pi[$.

3. Calculer $\lim\limits_{x\to\pi^-} F_0(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\pi^+} F_0(x)$, ainsi que $F_0(\frac{\pi}{2})$ et $F_0(\frac{2\pi}{3})$.

### Partie B — Un lemme de recollement

4. Soit $\psi$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b]$, telle que $\lim\limits_{x\to a^+}\psi'(x) = \ell$. À l'aide du TAF, montrer que $\psi$ est dérivable à droite en $a$ et que $\psi_d'(a) = \ell$. (*On admettra l'énoncé analogue à gauche.*)

### Partie C — Construction d'une primitive sur $\mathbb{R}$

On définit $F$ sur $\mathbb{R}$ ainsi : pour $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in ]-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi[$, $F(x) = F_0(x-2k\pi) + \dfrac{2k\pi}{\sqrt{3}}$, et $F((2k+1)\pi) = \dfrac{(2k+1)\pi}{\sqrt{3}}$.

5. Montrer que $F$ est continue en $\pi$ ; on admettra qu'elle l'est de même en chaque point $(2k+1)\pi$.

6. Montrer que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F' = f$ (*on utilisera la partie B au point $\pi$*).


© 2026 — Tous droits réservés

7. En étudiant $x \mapsto F(x+2\pi)-F(x)$, montrer que pour tout réel $x$ : $F(x+2\pi) = F(x)+\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

### Partie D — Conséquences

8. Montrer que la fonction $\theta : x \mapsto F(x) - \dfrac{x}{\sqrt{3}}$ est $2\pi$-périodique, puis qu'elle est bornée sur $\mathbb{R}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x}$.

9. Montrer que $F$ est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

10. *Piège.* La fonction $x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} \tan\dfrac{x}{2}\right)$, définie pour $x \neq (2k+1)\pi$, est-elle la restriction d'une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ ? Justifier.

## Problème 4 — sin et cos comme limites de sommes Σ ( 70 min ) ★★★★ Original

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots, \qquad C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

### Partie A — Dérivées des sommes

1. Montrer que $S_n' = C_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $C_0' = 0$ et $C_n' = -S_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Calculer $S_n(0)$ et $C_n(0)$.

2. En déduire que $1 - C_{n+1}$ est la primitive de $S_n$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $0$.

### Partie B — Encadrements alternés

3. À l'aide du lemme de comparaison (méthode M8), montrer par récurrence sur $n$ que, pour tout $x \geq 0$ :

$$C_{2n+1}(x) \leq \cos x \leq C_{2n}(x) \qquad \text{et} \qquad S_{2n+1}(x) \leq \sin x \leq S_{2n}(x).$$

(*Enchaînement conseillé :* $\cos \leq C_{2n} \Rightarrow \sin \leq S_{2n} \Rightarrow \cos \geq C_{2n+1} \Rightarrow \sin \geq S_{2n+1} \Rightarrow \cos \leq C_{2n+2}$.)

4. En déduire que, pour tout réel $x$ et tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\left|\sin x - S_n(x)\right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \qquad \text{et} \qquad \left|\cos x - C_n(x)\right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

### Partie C — Passage à la limite et applications

5. Soit $x > 0$ fixé ; on pose $w_m = \dfrac{x^m}{m!}$. Montrer que pour tout entier $m \geq 2x$ : $w_{m+1} \leq \dfrac{1}{2}\, w_m$, puis que $\lim\limits_{m\to+\infty} w_m = 0$.

6. En déduire que, pour tout réel $x$ : $\sin x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ et $\cos x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$.


© 2026 — Tous droits réservés

7. Montrer que $\left|\sin(0{,}1) - \left(0{,}1 - \dfrac{0{,}1^3}{6}\right)\right| \leq 10^{-7}$, puis déterminer le plus petit entier $n$ pour lequel la majoration de la question 4 garantit $\left|\cos 1 - C_n(1)\right| \leq 10^{-6}$.

8. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$.


© 2026 — Tous droits réservés

PARTIE II

# Dérivabilité, fonctions réciproques et étude de fonctions

*Dérivabilité en un point • demi-tangentes • dérivée d'une réciproque • arctan et racines n-ièmes • branches infinies*

## Contenu de cette partie


➤ **Feuille de route — Dérivabilité et réciproques** page 29
rappels, méthodes, astuces, pièges

➤ **Série n°1 — Dérivabilité, fonctions réciproques et étude de fonctions** page 31
7 exercices + 1 problème de synthèse • 3 h 40


## Objectif

Maîtriser la dérivabilité en un point, la dérivation d'une réciproque et mener une étude de fonction complète jusqu'au tracé.

PARTIE II • FEUILLE DE ROUTE

# Dérivabilité et fonctions réciproques

## ✎ Rappels de cours

**Dérivabilité en $x_0$.** $f$ est dérivable en $x_0$ si $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell\in\mathbb{R}$ ; on note $f'(x_0)=\ell$ et la tangente a pour équation $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Même définition à droite / à gauche ; $f$ est dérivable en $x_0$ *si et seulement si* elle l'est à droite et à gauche avec $f'_d(x_0)=f'_g(x_0)$.
**Interprétation.** Taux de limite infinie : demi-tangente verticale. $f'_d(x_0)\neq f'_g(x_0)$ : point anguleux (deux demi-tangentes). Dérivable $\Rightarrow$ continue ; la réciproque est fausse ($|x|$ en 0).
**Formules.** $(v\circ u)'=u'\times(v'\circ u)$ ; $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ $(u>0)$ ; $(\sqrt[n]{u})'=\frac{u'}{n\,(\sqrt[n]{u})^{n-1}}$ $(u>0)$ ; $(\arctan u)'=\frac{u'}{1+u^2}$.
**Fonction réciproque.** Si $f$ est continue et strictement monotone sur un intervalle $I$, elle réalise une bijection de $I$ sur l'intervalle $J=f(I)$ ; $f^{-1}$ est continue sur $J$, de même sens de variation que $f$, et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ est la symétrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite $y=x$. Si $f$ est dérivable en $x_0$ avec $f'(x_0)\neq 0$, alors $f^{-1}$ est dérivable en $y_0=f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Si $f'(x_0)=0$, $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ admet une (demi-)tangente verticale au point d'abscisse $y_0$.
**Arc tangente.** Bijection strictement croissante et impaire de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ ; pour $x>0$ : $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$.
**Branches infinies** (si $\lim_{\pm\infty}f=\pm\infty$). $\frac{f(x)}{x}\to\pm\infty$ : branche parabolique de direction $(Oy)$ ; $\frac{f(x)}{x}\to 0$ : direction $(Ox)$ ; $\frac{f(x)}{x}\to a\neq 0$ puis $f(x)-ax\to b\in\mathbb{R}$ : asymptote $y=ax+b$, ou $f(x)-ax\to\pm\infty$ : branche parabolique de direction $y=ax$.

## ➤ Méthodes

**M1** **Dérivabilité en un point « délicat »** (borne du domaine, raccord, racine qui s'annule) : revenir au taux d'accroissement et lever l'indétermination (quantité conjuguée, factorisation par $x-x_0$, changement de variable $s=\sqrt[n]{x}$, nombre dérivé connu).

**M2** **Montrer une bijection** : continuité et stricte monotonie sur l'intervalle, puis calcul de $J$ à l'aide des limites ou des valeurs aux bornes.

**M3** **Calculer** $(f^{-1})'(y_0)$ : trouver $x_0$ tel que $f(x_0)=y_0$ (souvent une valeur évidente), vérifier $f'(x_0)\neq 0$, conclure par la formule.

**M4** **Expression de** $(f^{-1})'(x)$ : écrire $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, puis exprimer $f'(y)$ à l'aide de $f(y)$ pour éliminer $f^{-1}$.

**M5** **Plan d'étude d'une fonction** : domaine ; parité, période (réduction) ; limites et branches infinies ; continuité et dérivabilité aux points délicats ; dérivée et signe ; tableau de variations ; points et tangentes remarquables ; tracé.

## ★ Astuces

★ Une limite du type $\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ est un *nombre dérivé déguisé* : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$…

★ Si $f'=g'$ sur un intervalle, alors $f-g$ est constante : on calcule la constante en un point bien choisi.

★ Pour les racines $n$-ièmes : $a-b=\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a}^{\,n-1}+\sqrt[n]{a}^{\,n-2}\sqrt[n]{b}+\cdots+\sqrt[n]{b}^{\,n-1}\right)$ pour $a,b>0$.

★ Une fonction impaire bijective a une réciproque impaire ; la parité et la périodicité réduisent l'intervalle d'étude.

## ✗ Pièges à éviter

✗ Conclure « même dérivée $\Rightarrow$ différence constante » sur un domaine qui n'est pas un intervalle : la constante peut changer d'un intervalle à l'autre (ex. arctan $\frac{x-1}{x+1}$ et arctan $x$).

- ✗ Appliquer la formule de dérivation de $\sqrt{u}$ ou $\sqrt[n]{u}$ en un point où $u$ s'annule : il faut étudier le taux d'accroissement.
- ✗ Oublier l'hypothèse $f'(x_0) \neq 0$ pour dériver $f^{-1}$ en $f(x_0)$.
- ✗ Confondre $f^{-1}$ (réciproque) et $\frac{1}{f}$ (inverse).
- ✗ Écrire $\arctan(\tan x) = x$ pour tout $x$ : ce n'est vrai que pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- ✗ Écrire $\sqrt[n]{x}$ pour $x < 0$ : la racine $n$-ième d'un nombre négatif n'est pas définie dans notre cadre.

# Série d'exercices n° 1

## Dérivabilité, fonctions réciproques et étude de fonctions

*Dérivabilité en un point • demi-tangentes • dérivée d'une réciproque • arctan et racines n-ièmes • branches infinies*

◆ **Classe : 2e Bac SM** ◆ **Année : 2026 / 2027** ◆ **Niveau : Bac SM — Entraînement**
◆ **Chapitre : Dérivabilité, fonctions réciproques et étude de fonctions**

**Durée indicative globale : 3 h 40 min** **Nombre d'exercices : 7 + problème**

**Objectifs de la série**

Maîtriser l'étude de la dérivabilité en un point (taux d'accroissement, demi-tangentes), la dérivation d'une fonction réciproque, les fonctions arctan et racines $n$-ièmes, et mener une étude de fonction complète jusqu'au tracé. Les exercices sont rangés par difficulté croissante ; le problème final réinvestit l'ensemble.

Difficulté : ★☆☆☆ application • ★★☆☆ technique • ★★★☆ raisonnement • ★★★★ type examen

### EXERCICE 1 • Dérivabilité en un point et interprétation géométrique

★☆☆☆ • 20 min

Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de $f$ au point indiqué et interpréter géométriquement le résultat.

1. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$, définie sur $\mathbb{R}$, au point $x_0 = 1$ (à droite puis à gauche).
2. $f(x) = \arctan(\sqrt{x^2-1})$, définie sur $[1, +\infty[$, à droite au point $x_0 = 1$.
3. $f(x) = \sqrt{(4 - \sqrt[3]{x^2})^3}$, définie sur $[-8, 8]$, à gauche au point $x_0 = 8$.
   *On pourra poser $s = \sqrt[3]{x}$ pour $x \in ]0, 8[$.*

### EXERCICE 2 • Même dérivée, constantes différentes

★☆☆☆ • 15 min

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$, puis montrer que $f$ est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et que $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
2. Un élève conclut : « $f$ et arctan ont la même dérivée, donc il existe une constante $c$ telle que $f(x) = \arctan x + c$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$. » Expliquer pourquoi ce raisonnement est incorrect.
3. Déterminer une expression simplifiée de $f(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$.

## EXERCICE 3 • Étude d'une fonction trigonométrique

★★☆☆ • 25 min

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x\,(1+\cos x)$.

1. Montrer que $f$ est périodique de période $2\pi$.
2. a) Étudier la parité de $f$.
   b) En déduire qu'il suffit d'étudier $f$ sur $[0,\pi]$, et préciser comment on obtient $\mathcal{C}_f$ sur $[-\pi,\pi]$ puis sur $\mathbb{R}$.
3. a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ : $f'(x) = (1+\cos x)(2\cos x - 1)$.
   b) Dresser le tableau de variations de $f$ sur $[0,\pi]$ et préciser le maximum de $f$ sur $\mathbb{R}$.
   c) Déterminer les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses $0$ et $\pi$.
   d) Tracer $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

## EXERCICE 4 • Une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-2,2[$ et sa réciproque

★★☆☆ • 30 min

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

1. Justifier que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{3}{2\,(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis montrer que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-2,2[$.
3. On note $g$ la bijection réciproque de $f$.
   a) Calculer $f(0)$. Montrer que $g$ est dérivable en $1$ et calculer $g'(1)$.
   b) Justifier que $g$ est dérivable sur $]-2,2[$.
   c) Montrer que pour tout $x\in]-2,2[$ : $4-x^2 = \dfrac{3}{g(x)^2+g(x)+1}$.
   d) En déduire que pour tout $x\in]-2,2[$ : $g'(x) = \dfrac{2\sqrt{3}}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$.
   e) Déterminer $g(x)$ explicitement pour $x\in]-2,2[$ et vérifier le résultat de la question précédente.

## EXERCICE 5 • Réciproque d'une fonction polynôme

★★☆☆ • 25 min

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x$.

1. Montrer que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note $g$ sa bijection réciproque.
2. Calculer $g(0)$, $g(2)$ et $g(-10)$.
3. Montrer que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x\in\mathbb{R}$ : $g'(x) = \dfrac{1}{3\,g(x)^2+1}$.
4. Donner une équation de la tangente à la courbe de $g$ au point d'abscisse $2$.
5. Montrer que $g$ est impaire.
6. a) Montrer que pour tout $x>0$ : $0 < g(x) < \sqrt[3]{x}$.

**b)** Montrer que pour tout $x > 0$ : $\dfrac{g(x)^3}{x} = 1 - \dfrac{g(x)}{x}$, puis que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 0$.

**c)** En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{\sqrt[3]{x}}$.

## EXERCICE 6 • Réciproque de la restriction de cosinus

★★★☆ • 35 min

Soit $f$ la fonction définie sur $I = ]0, \pi[$ par $f(x) = \cos x$.

**1.** **a)** Montrer que $f$ est une bijection de $I$ sur un intervalle $J$ à déterminer.

**b)** Montrer que $f^{-1}$ est dérivable sur $J$ et que pour tout $x \in J$ : $(f^{-1})'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

**2.** On considère la fonction $\varphi$ définie par $\varphi(x) = f^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\right)$.

**a)** Montrer que $\mathcal{D}_\varphi = [0, +\infty[$, calculer $\varphi(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

**b)** Montrer que $\varphi$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x > 0$ : $\varphi'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{x}\,(x+1)}$.

**3.** **a)** On pose $\psi(x) = \varphi(x) + \arctan\sqrt{x}$ pour $x \geqslant 0$. Montrer que $\psi$ est constante sur $[0, +\infty[$, puis que $\varphi(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\sqrt{x}$ pour tout $x \geqslant 0$.

**b)** Étudier la dérivabilité de $\varphi$ à droite en $0$ et interpréter géométriquement le résultat.

**c)** Dresser le tableau de variations de $\varphi$, puis tracer $\mathcal{C}_\varphi$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

## EXERCICE 7 • Une étude de fonction avec arctan

★★★☆ • 35 min

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{x}+1}\right)$, et l'on pose $u(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}+1}$ pour $x \geqslant 0$.

On rappelle que pour tout $t > 0$ : $\arctan t + \arctan\dfrac{1}{t} = \dfrac{\pi}{2}$ et que $\lim\limits_{t\to0} \dfrac{\arctan t}{t} = 1$.

**1.** Étudier la dérivabilité de $f$ à droite en $0$ et interpréter géométriquement le résultat.

**2.** **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

**b)** Montrer que pour tout $x > 0$ : $f(x) - \dfrac{\pi}{2}x = -x \arctan\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{x}\right)$, puis étudier la branche infinie de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

**3.** **a)** Montrer que $u$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $u'(x) = \dfrac{\sqrt{x}+2}{2(\sqrt{x}+1)^2}$.

**b)** En déduire les variations de $f$ et dresser son tableau de variations.

**4.** Montrer que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle $I$ à déterminer.

**5.** Tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ dans un même repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

## PROBLÈME DE SYNTHÈSE • Une fonction définie par morceaux ★★★★ • 60 min

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 - 3\sqrt[3]{x^2 + x} & \text{si } x \leqslant -1, \\ \dfrac{\arctan(x+1)}{x+1} & \text{si } x > -1. \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

### PARTIE A • Deux résultats préliminaires

1. Montrer que pour tout $t > 0$ : $\quad t - \dfrac{t^3}{3} < \arctan t < t$.
2. On considère la fonction $g$ définie sur $[0, +\infty[$ par $g(t) = \dfrac{t}{1+t^2} - \arctan t$.
   Étudier les variations de $g$, puis en déduire son signe sur $]0, +\infty[$.

### PARTIE B • Étude de $f$ sur $]-\infty, -1]$

1. Justifier que $f$ est bien définie sur $]-\infty, -1]$ et calculer $f(-1)$.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, puis étudier la branche infinie de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.
3. Étudier la dérivabilité de $f$ à gauche en $-1$ et interpréter géométriquement le résultat.
4. Montrer que $f$ est dérivable sur $]-\infty, -1[$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) > 1$ pour tout $x < -1$.

### PARTIE C • Étude de $f$ sur $]-1, +\infty[$

1. Montrer que $f$ est continue en $-1$.
2. En utilisant la partie A, étudier la dérivabilité de $f$ à droite en $-1$ et interpréter géométriquement le résultat. La fonction $f$ est-elle dérivable en $-1$ ?
3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement.
4. Montrer que pour tout $x > -1$ : $f'(x) = \dfrac{g(x+1)}{(x+1)^2}$, puis en déduire les variations de $f$ sur $]-1, +\infty[$.

### PARTIE D • Synthèse

1. Dresser le tableau de variations de $f$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f$ admet un maximum absolu que l'on précisera.
2. Tracer $\mathcal{C}_f$ (on prendra $f(-2) \approx -3{,}78$, $f(0) = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}79$ et $f(1) \approx 0{,}55$).

❖ **Fin de la série** ❖

PARTIE III

# Théorèmes de Rolle, des accroissements finis et I.A.F.

*Extremums • Rolle • T.A.F. • I.A.F. • encadrements • limites • nombre de racines • Taylor–Lagrange*

## Contenu de cette partie


➤ **Feuille de route — Rolle et accroissements finis** page 36
rappels, méthodes, astuces, pièges

➤ **Fiche de révision — L'essentiel du chapitre** page 37

➤ **Série n°2 — Rolle, accroissements finis et applications** page 39
8 exercices + 1 problème • 3 h 50

➤ **Exercices et problèmes — Rolle, T.A.F. et I.A.F.** page 43
10 exercices gradués + 3 problèmes de synthèse

PARTIE III • FEUILLE DE ROUTE

# Rolle, accroissements finis et I.A.F.

## ✎ Rappels de cours

**Extremum.** Si $f$ est dérivable en un point $x_0$ *intérieur* à $I$ et admet un extremum local en $x_0$, alors $f'(x_0) = 0$. La réciproque est fausse ($x \mapsto x^3$ en $0$).
**Théorème de Rolle.** Si $f$ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in ]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.
**Théorème des accroissements finis (T.A.F.).** Si $f$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in ]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$.
**Inégalité des accroissements finis (I.A.F.).** Sous les mêmes hypothèses : si $m \le f' \le M$ sur $]a,b[$, alors $m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a)$. Si $|f'| \le k$ sur un intervalle $I$, alors $|f(x) - f(y)| \le k\,|x-y|$ pour tous $x, y \in I$.
**Monotonie.** Sur un *intervalle*, $f' \ge 0 \Rightarrow f$ croissante ; $f' > 0$ sauf en un nombre fini de points $\Rightarrow f$ strictement croissante ; $f' = 0 \Rightarrow f$ constante.

## ➤ Méthodes

**M1** **Prouver l'existence de $c$ tel que ...** : ramener l'égalité à la forme $g'(c) = 0$, construire $g$ (souvent en « primitivant » l'expression), vérifier $g(a) = g(b)$ et appliquer Rolle. Ex. : $f'(c) = 2c \rightsquigarrow g(x) = f(x) - x^2$.

**M2** **Encadrer une expression** : choisir la fonction $f$ et l'intervalle $[a,b]$, appliquer le T.A.F., puis encadrer $f'(c)$ pour $c \in ]a,b[$ grâce à la monotonie de $f'$.

**M3** **Calculer une limite** : écrire une différence $f(b) - f(a)$ sous la forme $f'(c)(b-a)$ avec $c$ compris entre $a$ et $b$, puis conclure par encadrement.

**M4** **Dénombrer les racines** : le T.V.I. (ou la bijection) donne *au moins* $k$ racines ; Rolle par l'absurde donne *au plus* $k$ racines (si $f$ en avait $k+1$, $f'$ en aurait au moins $k$).

**M5** **Suite récurrente** : si $|f'| \le k < 1$ sur un intervalle stable contenant $\ell = f(\ell)$, alors $|u_{n+1} - \ell| \le k|u_n - \ell|$ et $|u_n - \ell| \le k^n |u_0 - \ell|$.

## ★ Astuces

★ Pour obtenir une inégalité valable pour tout $x > 0$, appliquer le T.A.F. sur $[0,x]$ (ou sur $[x, x+1]$, $[k, k+1]$...) en considérant $x$ comme fixé.

★ Si $f'$ est strictement monotone et $c \in ]a,b[$ (ouvert), les encadrements obtenus sont *stricts*.

★ Rolle « en cascade » : si $f$ s'annule en $n+1$ points distincts, $f'$ s'annule en au moins $n$ points, $f''$ en au moins $n-1$ points, etc.

★ Formule de Taylor–Lagrange : introduire la constante $A$ définie par l'égalité voulue, puis une fonction auxiliaire $\varphi$ telle que $\varphi(a) = \varphi(b)$ et appliquer Rolle.

## ✗ Pièges à éviter

✗ Appliquer Rolle ou le T.A.F. sans vérifier *toutes* les hypothèses : $|x|$ sur $[-1,1]$ (non dérivable en $0$), fonction discontinue en une borne, $f(a) \neq f(b)$.

✗ Croire que $c$ est unique ou qu'on peut le calculer : en général on sait seulement que $c \in ]a,b[$.

✗ Écrire « $c \in [a,b]$ » : le réel $c$ est dans l'intervalle *ouvert*, ce qui donne souvent des inégalités strictes.

✗ Pour $x < 0$, appliquer le T.A.F. sur « $[0,x]$ » : l'intervalle est $[x,0]$, et l'encadrement change de sens.

✗ Dire qu'un extremum en une borne de l'intervalle annule la dérivée : la condition $f'(x_0) = 0$ ne vaut qu'en un point intérieur.

✗ Conclure à la monotonie sur une réunion d'intervalles : $x \mapsto -\frac{1}{x}$ a une dérivée positive sur $\mathbb{R}^*$ mais n'est pas croissante sur $\mathbb{R}^*$.

**Maths Elites**

Collection « Vers l'excellence » — Terminale Sciences Mathématiques

Préparation Bac SM → CPGE

FICHE DE RÉVISION — CHAPITRE 4

# Théorèmes de Rolle, T.A.F. et I.A.F.

**Extremums, théorème de Rolle, accroissements finis et applications**

*L'essentiel du chapitre pour une révision express*

| AUTEUR | NIVEAU | FILIÈRE | ANNÉE | SEMESTRE |
|---|---|---|---|---|
| R. Abed — Agrégé de Math. | 2e Bac SM | Sciences Math. | 2026 / 2027 | S1 |

## Fiche de révision express — Rolle, T.A.F., I.A.F.

### Extremums

$f$ admet un **maximum local** en $x_0$ : $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in I \cap ]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$, $f(x) \le f(x_0)$.

**À retenir — Condition nécessaire**

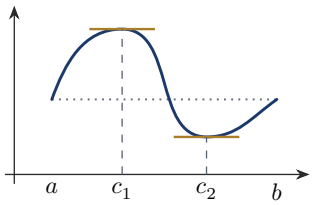
$x_0$ **intérieur** à $I$ + extremum local en $x_0$ + $f$ **dérivable** en $x_0 \Longrightarrow f'(x_0) = 0$.
Réciproque fausse : $x^3$ en 0.

**Condition suffisante :** $f'(x_0) = 0$ et $f'$ **change de signe** en $x_0 \Rightarrow$ extremum local.

### Théorème de Rolle

**À retenir**

$f$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, $f(a) = f(b)$
$\Longrightarrow \exists c \in ]a,b[,\ f'(c) = 0$.




**Conséquences :** $n$ zéros distincts de $f \Rightarrow$ au moins $n-1$ zéros distincts de $f'$. $f'$ ne s'annule pas $\Rightarrow$ $f(x) = 0$ a **au plus une** solution.

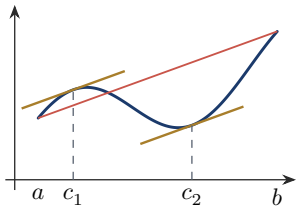
### Théorème des accroissements finis

**À retenir**

$f$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[ \Longrightarrow \exists c \in ]a,b[$ :

$$f(b) - f(a) = (b-a)\, f'(c).$$

**Géométrie :** une tangente parallèle à la corde $(AB)$.
**Preuve :** Rolle appliqué à $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.




### Inégalité des accroissements finis

**À retenir**

**(1)** $m \le f' \le M$ sur $]a,b[ \Rightarrow m(b-a) \le f(b)-f(a) \le M(b-a)$.
**(2)** $|f'| \le M$ sur l'intervalle $I \Rightarrow \forall a,b \in I$, $|f(b)-f(a)| \le M\,|b-a|$.

**Classiques :** $|\sin x| \le |x|$ ; $|\sin x - \sin y| \le |x-y|$ ; $|\arctan x - \arctan y| \le |x-y|$ ; $\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$ $(x>0)$.

## Suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Si $f(J) \subset J$, $f(\ell) = \ell$, $|f'| \leq k < 1$ sur $J$ :

$$|u_{n+1} - \ell| \leq k\,|u_n - \ell| \quad \text{et} \quad |u_n - \ell| \leq k^n\,|u_0 - \ell|\,.$$

## Monotonie (sur un INTERVALLE)

$f' \geq 0 \iff f$ croissante ; $f' = 0 \iff f$ constante.
$f' \geq 0$ et $f' = 0$ en un nombre fini de points $\Rightarrow$ strictement croissante.

**Piège à éviter**

Sur $\mathbb{R}^*$ (pas un intervalle) : $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ a une dérivée nulle mais vaut $\frac{\pi}{2}$ si $x > 0$ et $-\frac{\pi}{2}$ si $x < 0$.

## Méthodes-réflexes

- **Existence d'un zéro de** $g$ : chercher $\varphi$ avec $\varphi' = g$ et $\varphi(a) = \varphi(b) \to$ Rolle.
- **Inégalité entre** $f(b) - f(a)$ **et** $b - a \to$ T.A.F. puis encadrer $f'(c)$.
- **Majorer** $|f(x) - f(y)| \to$ I.A.F. avec $M = \sup |f'|$.
- **Prouver** $f =$ **constante** $\to f' = 0$ sur un intervalle, puis calculer $f$ en un point bien choisi.
- **Nombre de racines** : TVI (au moins) + Rolle (au plus).


© 2026 — Tous droits réservés

# Série d'exercices n° 2

## Théorème de Rolle, accroissements finis et applications

*Théorème de Rolle • T.A.F. • inégalité des accroissements finis • encadrements • limites • nombre de racines*

◆ **Classe :** 2e Bac SM ◆ **Année :** 2026 / 2027 ◆ **Niveau :** Bac SM — Entraînement
◆ **Chapitre :** Théorème de Rolle, accroissements finis et applications

**Durée indicative globale :** 3 h 50 min **Nombre d'exercices :** 8 + problème

**Objectifs de la série**

Savoir appliquer le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis en vérifiant leurs hypothèses ; construire une fonction auxiliaire ; utiliser l'inégalité des accroissements finis pour encadrer, calculer des limites et dénombrer les solutions d'une équation. Le problème final réinvestit ces outils pour approcher $\pi$.

Difficulté : ★★★★ application • ★★★★ technique • ★★★★ raisonnement • ★★★★ type examen

### EXERCICE 1 • Une racine garantie par le théorème de Rolle

★★★★ • 15 min

1. Soient $a$, $b$ et $c$ trois nombres réels. En considérant la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a+b+c)x$, montrer que l'équation

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a+b+c) = 0$$

admet au moins une solution dans l'intervalle $]0,1[$.

2. **Généralisation.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} = 0$.
Montrer que l'équation $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ admet au moins une solution dans $]0,1[$.

### EXERCICE 2 • Encadrement par le T.A.F. (d'après Bac 1996)

★★★★ • 15 min

1. Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $0 \leqslant a < b$. Montrer que

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}.$$

2. En déduire que $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3}{25} < \arctan\dfrac{4}{3} < \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{6}$.

3. Montrer que pour tous réels $x$ et $y$ : $|\arctan x - \arctan y| \leqslant |x-y|$.

## EXERCICE 3 • Les hypothèses comptent ! (exercice piège)

★★☆☆ • 20 min

1. On considère $f : x \mapsto |x|$ sur $[-1, 1]$. Vérifier que $f(-1) = f(1)$. Existe-t-il $c \in ]-1, 1[$ tel que $f'(c) = 0$ ? Quelle hypothèse du théorème de Rolle n'est pas satisfaite ?
2. On définit $g$ sur $[0, 1]$ par $g(x) = x$ si $x \in [0, 1[$ et $g(1) = 0$. Montrer que $g(0) = g(1)$ et que $g$ est dérivable sur $]0, 1[$, mais que $g'$ ne s'annule pas sur $]0, 1[$. Expliquer.
3. Soit $h : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Calculer $\dfrac{h(1) - h(-1)}{1 - (-1)}$ et montrer qu'aucun $c \in ]-1, 1[\setminus\{0\}$ ne vérifie $h'(c) = \dfrac{h(1) - h(-1)}{2}$. Pourquoi le T.A.F. n'est-il pas contredit ?
4. **Vrai ou faux ?** Justifier chaque réponse.
   a) Si $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et si $f'$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, alors $f$ est injective.
   b) Si $f$ est dérivable sur $[a, b]$ et si $c \in ]a, b[$ vérifie $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, alors $c = \dfrac{a + b}{2}$.

## EXERCICE 4 • Rolle avec une fonction auxiliaire

★★☆☆ • 20 min

Soit $f$ une fonction continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$, telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

1. Montrer qu'il existe $c \in ]0, 1[$ tel que $f'(c) = 2c$.
2. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$.
3. Montrer qu'il existe $c \in ]0, 1[$ tel que $2c\, f'(c) = \sqrt{c}$.

## EXERCICE 5 • Encadrement de $\arctan(x)/x$ et limite

★★☆☆ • 20 min

1. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que
$$\forall x \in ]0, +\infty[, \qquad \frac{1}{1 + x^2} < \frac{\arctan x}{x} < 1.$$
2. En déduire que pour tout $x > 0$ : $-\dfrac{x}{1 + x^2} < \dfrac{\arctan x - x}{x^2} < 0$.
3. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\arctan x - x}{x^2}$, puis $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan x - x}{x^2}$.

## EXERCICE 6 • Compter les racines d'une équation

★★☆☆ • 25 min

1. Soit $\varphi$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en quatre réels distincts $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Montrer que $\varphi'$ s'annule en au moins trois réels distincts.
2. On considère $P(x) = x^5 - 5x + 1$. Résoudre $P'(x) = 0$ et en déduire, à l'aide de la question 1, que l'équation $P(x) = 0$ admet *au plus* trois solutions réelles.
3. Calculer $P(-2)$, $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$. En déduire que l'équation $P(x) = 0$ admet *exactement* trois solutions réelles $\alpha < \beta < \gamma$, et préciser pour chacune un intervalle d'amplitude $1$ la contenant.

**4.** Montrer que $\beta \in ]0{,}2\,;\,0{,}25[$.

## EXERCICE 7 • Calcul de limites à l'aide du T.A.F.

★★★☆ • 25 min

En utilisant le théorème des accroissements finis, calculer les limites suivantes.

**1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}\right)$.

**2.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan\sqrt{x+2} - \arctan\sqrt{2}}{x}$.

**3.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x^{n-1}}\left(\sqrt[n]{x+1} - \sqrt[n]{x}\right)$, où $n$ est un entier tel que $n \geqslant 2$.

## EXERCICE 8 • Rolle sur une infinité d'intervalles : l'équation $\tan x = x$

★★★☆ • 30 min

Soit $f$ la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ si $x \in ]0,1]$ et $f(0) = 0$.

**1.** Montrer que $f$ est continue sur $[0,1]$.

**2.** Montrer que $f$ n'est pas dérivable à droite en $0$ (on admet que la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$).

**3.** Justifier que $f$ est dérivable sur $]0,1]$ et calculer $f'(x)$.

**4.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $c_n \in \left]\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right[$ tel que $f'(c_n) = 0$.

**5.** **a)** Montrer que $\cos\left(\dfrac{\pi}{c_n}\right) \neq 0$, puis que $t_n = \dfrac{\pi}{c_n}$ vérifie $\tan t_n = t_n$.

**b)** En déduire que l'équation $\tan x = x$ admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$.

## PROBLÈME DE SYNTHÈSE • Encadrements de arctan et approximation de $\pi$

★★★★ • 50 min

On rappelle que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, et impaire.

### PARTIE A • Encadrements polynomiaux de arctan

**1.** Montrer que pour tout $t > 0$ : $\quad t - \dfrac{t^3}{3} < \arctan t < t$.

**2.** On pose $k(t) = t - \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^5}{5} - \arctan t$ pour $t \geqslant 0$. Montrer que $k'(t) = \dfrac{t^6}{1+t^2}$, puis que

$$\forall t > 0, \qquad \arctan t < t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}.$$

## PARTIE B • Application au calcul de limites

On définit la fonction $F$ sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{x - \arctan x}{x^3}$ si $x \neq 0$ et $F(0) = \dfrac{1}{3}$.

1. Montrer que $F$ est paire.
2. Montrer que pour tout $x > 0$ : $\dfrac{1}{3} - \dfrac{x^2}{5} < F(x) < \dfrac{1}{3}$. En déduire que $F$ est continue en $0$.
3. Montrer que $F$ est dérivable en $0$ et que $F'(0) = 0$.

## PARTIE C • Une approximation de $\pi$

1. On pose $a = \arctan\dfrac{1}{2}$ et $b = \arctan\dfrac{1}{3}$. Justifier que $a+b \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer $\tan(a+b)$. En déduire que $\arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$.
2. À l'aide de la partie A, en déduire que $\dfrac{505}{162} < \pi < \dfrac{6115}{1944}$, et donner un encadrement décimal de $\pi$ d'amplitude inférieure à $0{,}03$.

❖ **Fin de la série** ❖

**Maths Elites**

Collection « Vers l'excellence » — Terminale Sciences Mathématiques

Préparation Bac SM → CPGE

EXERCICES ET PROBLÈMES — CHAPITRE 4

# Théorèmes de Rolle, T.A.F. et I.A.F.

**Extremums, théorème de Rolle, accroissements finis et applications**

*10 exercices gradués et 3 problèmes de synthèse — énoncés puis corrigés détaillés*

| AUTEUR | NIVEAU | FILIÈRE | ANNÉE | SEMESTRE |
|---|---|---|---|---|
| R. Abed — Agrégé de Math. | 2e Bac SM | Sciences Math. | 2026 / 2027 | S1 |

## Exercices d'application

Les exercices sont rangés par difficulté croissante. Les corrigés détaillés sont regroupés dans une section distincte, après les problèmes.

### Exercice 1 — Dénombrer des racines : T.V.I. + Rolle

★★☆☆ Basique

On considère $h(x) = x^5 - 5x + 1$.

1. Calculer $h(-2), h(-1), h(0), h(1), h(2)$ et montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet au moins trois solutions réelles.
2. Résoudre $h'(x) = 0$. En raisonnant par l'absurde avec le théorème de Rolle, montrer que $h(x) = 0$ admet au plus trois solutions.
3. Conclure, et localiser chaque solution entre deux entiers consécutifs.

### Exercice 2 — Encadrement d'une racine cubique par le T.A.F.

★★☆☆ Classique

1. Montrer que : $\forall x \in [0,1], \quad 1 + \dfrac{x}{3\sqrt[3]{4}} \leq \sqrt[3]{1+x} \leq 1 + \dfrac{x}{3}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Généraliser : $\forall x \in [0,1], \quad 1 + \dfrac{x}{n\sqrt[n]{2^{n-1}}} \leq \sqrt[n]{1+x} \leq 1 + \dfrac{x}{n}$.
3. Application : donner un encadrement de $\sqrt[3]{1{,}1}$ d'amplitude inférieure à $0{,}013$.

### Exercice 3 — Arc tangente : encadrement et limite

★★☆☆ Classique

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $0 \leq a < b$.

1. Montrer que : $\dfrac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \dfrac{b-a}{1+a^2}$.

2. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x - x}{x^2}$.

## Exercice 4 — Moyenne de deux valeurs et Rolle

★★☆☆ Classique

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$, et $x_1 < x_2 < x_3$ trois éléments de $I$ tels que $2f(x_3) = f(x_1) + f(x_2)$. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $f'(c) = 0$.

## Exercice 5 — Une fonction auxiliaire avec une racine carrée

★★☆☆ Classique

Soit $f$ continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$, telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in ]0,1[$ tel que $f'(c) = \dfrac{1}{2\sqrt{c}}$.

## Exercice 6 — Approximation de arctan par l'I.A.F.

★★★☆ Important

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\quad 1 - x^2 \leq \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1 - x^2 + x^4$.
2. On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \arctan x - x + \dfrac{1}{3}x^3$.
   (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leq x^4$.
   (b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq |x|^5$.
   (c) En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x - x}{x^3}$.

## Exercice 7 — Une égalité entre dérivées logarithmiques

★★★☆ Original

Soit $f$ une fonction dérivable sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in ]0,1[,\ f(x) > 0$. Montrer qu'il existe $c \in ]0,1[$ tel que

$$2\,\frac{f'(c)}{f(c)} = 3\,\frac{f'(1-c)}{f(1-c)}.$$

*Indication : étudier $g(x) = f(x)^2\, f(1-x)^3$.*

## Exercice 8 — Formule de Taylor–Lagrange à l'ordre 2

★★★☆ Important

Soit $f$ deux fois dérivable sur un intervalle $I$, et $a, b \in I$ avec $a < b$.

1. Justifier l'existence d'un réel $A$ tel que $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dfrac{(b-a)^2}{2}A$.
2. On pose, pour $x \in [a,b]$ : $\varphi(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \dfrac{(b-x)^2}{2}A$. Calculer $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ et $\varphi'(x)$.
3. En déduire qu'il existe $c \in ]a,b[$ tel que $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dfrac{(b-a)^2}{2}f''(c)$.
4. Application : montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$.


© 2026 — Tous droits réservés

### Exercice 9 — Formule de Taylor–Lagrange à l'ordre 3 ★★★★ Original

Soit $f$ trois fois dérivable sur un intervalle $I$, et $a, b \in I$ avec $a < b$.

1. En s'inspirant de l'exercice précédent, montrer qu'il existe $c \in ]a, b[$ tel que
$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \frac{(b-a)^3}{6}f'''(c).$$
2. Application : montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x - x| \leq \dfrac{|x|^3}{6}$.

### Exercice 10 — Théorème des accroissements finis généralisé (Cauchy) ★★★★ Important

Soient $a < b$, et $f, g$ deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$, telles que $\forall x \in ]a, b[,\ g'(x) \neq 0$.

1. Montrer que $g(a) \neq g(b)$.
2. On considère la fonction $H$ définie sur $[a, b]$ par
$$H(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a)).$$
En appliquant le théorème de Rolle à $H$, montrer qu'il existe $c \in ]a, b[$ tel que
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
3. Applications. Calculer :
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ ;
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{x^3}$ ;
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{1}{3}x}{x^2}$.

## Problèmes de synthèse

### Problème 1 — Une suite récurrente pilotée par l'I.A.F. ★★★☆ Important

**Partie A — Un point fixe.** On considère la fonction $g$ définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \arctan x - x + 1$.

1. Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de $g$ (avec la limite en $+\infty$).
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\ell$ dans $[0, +\infty[$, et que $\ell = 1 + \arctan \ell$.
3. Sachant que $\tan 1 \approx 1{,}557$, montrer que $2 < \ell < 3$.

**Partie B — La suite.** Soit $f(x) = 1 + \arctan x$ et $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. Montrer que $f([1, 3]) \subset [1, 3]$, puis que $u_n \in [1, 3]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.


© 2026 — Tous droits réservés

5. Montrer que $(u_n)$ est croissante.
6. Montrer que $\forall x \in [1,3],\ |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
7. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|$, puis que $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Conclure.
8. Déterminer un entier $n_0$ tel que $u_{n_0}$ soit une valeur approchée de $\ell$ à $10^{-3}$ près.

**Partie C — Accélérer l'estimation.**

9. Montrer que $u_n \in \left[1 + \frac{\pi}{4}, 3\right]$ pour tout $n \geq 1$ et que $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$ sur cet intervalle.
10. En déduire que $|u_n - \ell| \leq \frac{13}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ pour $n \geq 1$, puis un nouvel entier $n_1$ convenant pour la précision $10^{-3}$. Comparer avec $n_0$.

## Problème 2 — Sinus, cosinus et inégalités en cascade

★★★☆ Classique

**Partie A.** Pour $x \in [0, +\infty[$, on pose

$$\varphi_1(x) = x - \sin x, \qquad \varphi_2(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}, \qquad \varphi_3(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6},$$
$$\varphi_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos x, \quad \varphi_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \sin x.$$

1. Calculer $\varphi_k(0)$ pour $k = 1, \dots, 5$ et exprimer $\varphi_k'$ en fonction de $\varphi_{k-1}$ pour $k = 2, \dots, 5$.
2. Montrer que $\varphi_1 \geq 0$ sur $[0, +\infty[$, puis, de proche en proche, que $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ sont positives sur $[0, +\infty[$.

**Partie B.**

3. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right| \leq \frac{|x|^5}{120}$.
4. En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$ (comparer avec l'exercice 10).
5. Donner une valeur approchée de $\sin(0{,}1)$ et majorer l'erreur commise.

**Partie C — Retour au T.A.F.**

6. Soit $x \in ]0, \pi[$. Montrer, par le T.A.F., que $x \cos x < \sin x < x$.
7. En déduire un encadrement de $\dfrac{\sin x}{x}$ pour $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ et retrouver $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{x}$.

## Problème 3 — Rolle en cascade et polynômes de Legendre

★★★★ Original

**Partie A — Le cas $n = 3$.** Soit $Q(x) = (x^2 - 1)^3$.

1. Montrer que $Q'(x) = 6x(x^2 - 1)^2$ et $Q''(x) = 6(x^2 - 1)(5x^2 - 1)$. En déduire que $Q$, $Q'$ et $Q''$ s'annulent en $-1$ et en $1$.
2. Sans calculer $Q'''$, montrer à l'aide du théorème de Rolle que $Q'$ admet au moins une racine dans $]-1, 1[$, puis que $Q''$ en admet au moins deux, puis que $Q'''$ en admet au moins trois.
3. En déduire que $Q'''$ a exactement trois racines, toutes dans $]-1, 1[$. Vérifier en calculant $Q'''$.

**Partie B — Généralisation (perspective CPGE).** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n(x) = (x^2 - 1)^n$. On **admet**


© 2026 — Tous droits réservés

que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $P_n^{(k)}(-1) = P_n^{(k)}(1) = 0$ (cela résulte du facteur $(x-1)^n(x+1)^n$).

4. Montrer par récurrence sur $k \in \{0, \dots, n\}$ que $P_n^{(k)}$ admet au moins $k$ racines distinctes dans $]-1, 1[$.

5. En déduire que le polynôme $L_n = P_n^{(n)}$ (de degré $n$) admet exactement $n$ racines réelles distinctes, toutes situées dans $]-1, 1[$.


© 2026 — Tous droits réservés

PARTIE IV

# Suites numériques

*Limites • sommes et produits • suites adjacentes • suites récurrentes • suites implicites*

## Contenu de cette partie


➤ **Feuille de route — Suites numériques** page 49
rappels, méthodes, astuces, pièges

➤ **Série n°1 — Calculs de limites** page 50
7 exercices • 2 h 30

➤ **Série n°2 — Sommes, produits et encadrements** page 54
8 exercices • 3 h 15

➤ **Série n°3 — Suites adjacentes et suites couplées** page 58
6 exercices • 2 h 50

➤ **Série n°4 — Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$** page 62
8 exercices • 3 h 50

➤ **Série n°5 — Suites implicites** page 66
7 exercices + 1 problème • 4 h 35

PARTIE IV • FEUILLE DE ROUTE

# Suites numériques

## ✎ Rappels de cours

**Suites monotones.** Croissante et majorée (ou décroissante et minorée) $\Rightarrow$ convergente ; croissante et non majorée $\Rightarrow$ limite $+\infty$. Si $(u_n)$ croît vers $\ell$, alors $u_n \leq \ell$ pour tout $n$.
**Suites adjacentes.** $(u_n)$ croissante, $(v_n)$ décroissante et $v_n - u_n \to 0 \Rightarrow$ elles convergent vers une même limite $\ell$, et $u_n \leq \ell \leq v_n$ pour tout $n$.
**Comparaison.** Gendarmes ; $u_n \leq v_n$ et $u_n \to +\infty \Rightarrow v_n \to +\infty$ ; (bornée)$\times$(tend vers 0) $\to 0$. Si $u_n \to \ell$ et $f$ est continue en $\ell$, alors $f(u_n) \to f(\ell)$. Si $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ ont la même limite $\ell$, alors $u_n \to \ell$.
**Références.** $q^n \to 0$ si $|q| < 1$, $\to +\infty$ si $q > 1$, pas de limite si $q \leq -1$ ; $n^\alpha \to +\infty$ ($\alpha > 0$ rationnel) ; $\sqrt[n]{a} \to 1$ ($a > 0$).
**Sommes.** $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $(q \neq 1)$.
**Point fixe.** Si $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_n \to \ell$ et $f$ est continue en $\ell$, alors $f(\ell) = \ell$.

## ➤ Méthodes

**M1** **Limite d'une expression** : factoriser par le terme dominant ; quantité conjuguée pour une différence de racines ; encadrement puis gendarmes ; forme $X_n^{Y_n}$ : écrire $\mathrm{e}^{Y_n \ln X_n}$.

**M2** **Somme** $\sum g(k)$ : télescopage si $g(k) = a_{k+1} - a_k$ ; sinon encadrement terme à terme puis sommation. Avec $F' = g$ et $g$ croissante, le T.A.F. sur $[k, k+1]$ donne $g(k) \leq F(k+1) - F(k) \leq g(k+1)$.

**M3** **Suites adjacentes** : étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ et de $v_{n+1} - v_n$, puis montrer que $v_n - u_n \to 0$ ; utiliser $u_n \leq \ell \leq v_n$ pour encadrer $\ell$.

**M4** **Suite récurrente** $u_{n+1} = f(u_n)$ : ① intervalle stable $f(I) \subset I$ et récurrence ; ② monotonie ; ③ convergence (suite monotone bornée) ; ④ limite : résoudre $f(\ell) = \ell$ dans $I$ ; ⑤ vitesse par l'I.A.F.

**M5** **Suite implicite** $f_n(u_n) = 0$ : existence et unicité par la bijection ; localisation $a < u_n < b$ ; monotonie en comparant $f_{n+1}(u_n)$ au signe de $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ ; convergence ; limite par passage à la limite, encadrement ou absurde.

## ★ Astuces

★ Si $f$ est croissante sur un intervalle stable, $(u_n)$ est monotone, de sens donné par le signe de $u_1 - u_0$. Si $f$ est décroissante, étudier $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ (récurrentes pour $f \circ f$, qui est croissante).

★ Pour $u_n > 0$ : comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 ; si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k < 1$ à partir d'un rang, alors $u_n \to 0$.

★ Inégalité de Bernoulli : $(1+x)^n \geq 1 + nx$ pour $x \geq 0$, utile pour montrer $q^n \to +\infty$ ou minorer.

★ De $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$ on déduit un rang $n_0$ garantissant une précision donnée.

## ✗ Pièges à éviter

✗ « Croissante et majorée par $M \Rightarrow$ limite $M$ » : faux, on a seulement $\ell \leq M$.

✗ « $u_{n+1} - u_n \to 0 \Rightarrow (u_n)$ converge » : faux ($u_n = \sqrt{n}$).

✗ « $u_n > 0$ et $u_n \to \ell \Rightarrow \ell > 0$ » : faux, le passage à la limite donne seulement $\ell \geq 0$.

✗ « $(|u_n|)$ converge $\Rightarrow (u_n)$ converge » : faux ($u_n = (-1)^n$).

✗ Confondre le sens de variation de $f$ et celui de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$.

✗ Résoudre $f(\ell) = \ell$ sans vérifier que $\ell$ appartient à l'intervalle stable, ou sans justifier la continuité de $f$ en $\ell$.

✗ Forme indéterminée $1^\infty$ : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ne tend pas vers 1.

# Maths Élites

Terminale Sciences Mathématiques • 2026 / 2027

# Série d'exercices n° 1 sur les suites

## Calculs de limites

| Durée indicative | Classe | Année | Auteur | Exercices |
|---|---|---|---|---|
| ≈ 2 h 30 | 2e Bac SM | 2026 / 2027 | R. Abed | 7 |

## Feuille de route du thème

### Règle générale – à savoir

- **Références** : $q^n \to 0$ si $|q| < 1$, $\to +\infty$ si $q > 1$, pas de limite si $q \leq -1$ ; $\frac{\ln n}{n^a} \to 0$, $\frac{n^p}{a^n} \to 0$ $(a > 1)$, $\frac{a^n}{n!} \to 0$, $\frac{n!}{n^n} \to 0$ ; $\sqrt[n]{a} = \mathrm{e}^{\frac{\ln a}{n}} \to 1$.
- **Nombres dérivés** $(t \to 0)$ : $\frac{\ln(1+t)}{t}$, $\frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}$, $\frac{\sin t}{t}$, $\frac{\arctan t}{t} \to 1$.
- **Comparaison** : gendarmes ; bornée $\times$ (tend vers 0) $\to 0$ ; $f$ continue en $\ell$ et $u_n \to \ell \Rightarrow f(u_n) \to f(\ell)$.
- **Bernoulli** : $(1+x)^n \geq 1 + nx$ pour $x \geq 0$ ; **quotient** : $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k < 1$ à partir d'un rang $\Rightarrow u_n \to 0$.

### Méthode – les réflexes

1. Quotient de puissances : **factoriser par le terme dominant** ; différence de racines : **quantité conjuguée**.
2. sin, cos, $(-1)^n$, $E(\cdot)$, somme de $n$ termes : **encadrer** (chaque terme), puis gendarmes.
3. Puissance $X_n^{Y_n}$ : écrire $\mathrm{e}^{Y_n \ln X_n}$ et faire apparaître $\frac{\ln(1+t_n)}{t_n}$ ; exemple : $\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n} = \mathrm{e}^{6 \cdot \frac{\ln(1+t_n)}{t_n}} \to \mathrm{e}^6$ avec $t_n = \frac{2}{n}$.
4. Factorielle : étudier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ou comparer (par exemple $\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$).

### Pièges

- « $1^\infty = 1$ » est faux $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}\right)$ ; une somme de $n$ termes tendant vers 0 peut tendre vers $+\infty$.
- $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Rightarrow$ décroissante **seulement si** $u_n > 0$ ; $u_n > 0 \Rightarrow \ell \geq 0$ (inégalité **large**).
- $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ convergentes ne suffisent pas : il faut la **même** limite.

## Exercices

### Exercice 1 – Limites de référence ★ 15 min

Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des suites suivantes :

1. $a_n = \dfrac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}$ ;
2. $b_n = \dfrac{\sin n}{n + (-1)^n} \quad (n \geq 2)$ ;
3. $c_n = \dfrac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n} \quad (n \geq 2)$ ;
4. $d_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ ;
5. $e_n = \sqrt[n]{n^2} \quad (n \geq 1)$ ;
6. $f_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ;
7. $g_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$.

### Exercice 2 – Vrai ou faux ? (exercice piège) ★ 20 min

Pour chaque affirmation, répondre par **Vrai** ou **Faux**, en justifiant : une démonstration si l'affirmation est vraie, un **contre-exemple** si elle est fausse.

1. Si $(u_n)$ est croissante et majorée par 2, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$, alors la suite $(u_n)$ est convergente.
3. Si $u_n > 0$ pour tout $n$ et si $(u_n)$ converge vers $\ell$, alors $\ell > 0$.
4. Si $u_n \neq 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ pour tout $n$, alors $(u_n)$ est décroissante.
5. Si $(u_n)$ est bornée et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$.
6. Si les suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ sont convergentes, alors $(u_n)$ est convergente.
7. Si la suite $(|u_n|)$ est convergente, alors $(u_n)$ est convergente.

### Exercice 3 – Limites (III) ★ 15 min

Déterminer la limite de la suite $(u_n)$ dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = (-2)^n + 3^n$ ;
2. $u_n = \dfrac{2^{n+1} - 5}{3^n + 6}$ ;
3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$ ;
4. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$.

### Exercice 4 – Limites (II) ★★ 25 min

Déterminer la limite de la suite $(u_n)$ dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{2^n - 5^{n-2}}{2^{2n+1} - 3^n}$ ;
2. $u_n = \sqrt{n} - n^{\frac{5}{3}}$ ;
3. $u_n = \dfrac{2n + \sin(2n-1)}{n+3}$ ;
4. $u_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{3^{n+2}}$ ;
5. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n + \sqrt{k}}$ ;
6. $u_n = 2^{n+1} \arctan\left(\dfrac{a}{2^n + 3}\right)$, $a \in \mathbb{R}$ ;
7. $u_n = \dfrac{n}{3^n}$.
8. Soit $a \geq 1$.
   a) Montrer par récurrence que pour tout $x \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$ : $(1+x)^n \geq 1 + nx$ (*inégalité de Bernoulli*).
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $1 \leq \sqrt[n]{a} \leq 1 + \dfrac{a}{n}$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a}$.

## Exercice 5 – Suites du type $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ ★★ 25 min

On rappelle que $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$. Soit $a$ un réel non nul. Déterminer la limite de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ ;
2. $v_n = \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n \quad (n > |a|)$ ;
3. $w_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n \quad (n \geq 2)$ ;
4. $x_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ ;
5. $y_n = \dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

## Exercice 6 – Vitesse de convergence de $\sqrt[n]{a}$ ★★ 20 min

Soient $a \in ]1\,;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

1. En appliquant le théorème des accroissements finis à $x \mapsto x^n$ sur $[1\,;\sqrt[n]{a}]$, montrer que $0 < \sqrt[n]{a} - 1 \leq \dfrac{a-1}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)$.
2. a) Montrer que pour tout $n \geq 2$ et tout $b > 0$ : $\dfrac{n(n-1)}{2} b^2 \leq (1+b)^n$.
   b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1)^2$.

## Exercice 7 – Factorielle et croissances comparées ★★ 30 min

1. Soit $a > 0$ et $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$ $(n \in \mathbb{N})$. On fixe un entier $N \geq 2a$.
   a) Montrer que pour tout $n \geq N$ : $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} u_n$.
   b) En déduire que pour tout $n \geq N$ : $0 < u_n \leq u_N \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-N}$, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. Soit $w_n = \dfrac{n!}{3^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Montrer que pour tout $n \geq 3$ : $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} \geq \dfrac{4}{3}$, puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

**3.** Soit $v_n = \dfrac{2^n\, n!}{(n+1)^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

**a)** Montrer que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}$, puis, à l'aide de l'inégalité de Bernoulli (exercice 4), que $(v_n)$ est décroissante.

**b)** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $n! \leq \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

**c)** En remarquant que $\dfrac{n+1}{n} \leq \dfrac{3}{2}$ pour $n \geq 2$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n}$.

**4.** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n + n!}{3^n + n!}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^n + 5^n}{n!}$.

Fin de la série • Bon travail • Collection Maths Élites

# Maths Élites

Terminale Sciences Mathématiques • 2026 / 2027

## Série d'exercices n° 2 sur les suites

### Sommes, produits et encadrements

| Durée indicative | Classe | Année | Auteur | Exercices |
|---|---|---|---|---|
| ≈ 3 h 15 | 2e Bac SM | 2026 / 2027 | R. Abed | 8 |

## Feuille de route du thème

### Règle générale – à savoir

- **Sommes** : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ; $x-1 < E(x) \leq x$.
- **Télescopage** : $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k) = a_{n+1}-a_1$, $\prod_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_1}$ ; $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.
- **Rolle** : $f$ continue sur $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[$, $f(a)=f(b) \Rightarrow \exists c \in ]a\,;b[,\ f'(c)=0$.
- **T.A.F.** : $f$ continue sur $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[ \Rightarrow \exists c \in ]a\,;b[,\ f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.
- **I.A.F.** : $m \leq f' \leq M$ sur $I \Rightarrow m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$ ; $|f'| \leq k$ sur $I \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq k\,|x-y|$.

### Méthode – encadrer $\sum g(k)$ par le T.A.F.

1. Chercher $F$ telle que $F' = g$ ; appliquer le T.A.F. sur $[k\,;k+1]$ : $F(k+1)-F(k) = g(c)$, $k < c < k+1$.
2. Si $g$ est croissante : $g(k) \leq F(k+1)-F(k) \leq g(k+1)$ (inégalités inversées si $g$ décroît).
3. Sommer (télescopage), diviser par la bonne puissance de $n$, conclure par les gendarmes.

*Exemple* : $F(x) = 2\sqrt{x}$ donne $\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$, d'où $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \to 2$. *Résultat général* : $\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n} k^r \to \frac{1}{r+1}$ ($r > 0$ rationnel).

### Astuce – inégalités utiles, à redémontrer

$\mathrm{e}^x \geq 1+x$ ; $\ln x \leq x-1$ ; $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ $(x \geq 0)$ ; $\frac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x$ $(x \geq 0)$ ; $\frac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a}$ $(0 < a < b)$.

### Pièges

- T.A.F. : hypothèses sur le **fermé** et l'**ouvert** ; le point $c$ ne se calcule pas, il s'**encadre**.
- Indices : pour $F(n)-F(1)$, sommer de $k=1$ à $n-1$ ; traiter $n=1$ à part ; lire les bornes d'un produit ($k=1$ peut l'annuler).

- La normalisation change tout : $\frac{1}{n^2}\sum E(kx) \to \frac{x}{2}$ mais $\frac{1}{n}\sum E(kx) \to \pm\infty$ $(x \neq 0)$.

## Exercices

### Exercice 1 – Sommes et théorème des gendarmes ★★ 25 min

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x$ un réel fixé ; $E$ désigne la fonction partie entière. Déterminer la limite de chacune des suites suivantes :

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$ ;
2. $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$ ;
3. $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k}$ ;
4. $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ ;
5. $W_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(kx)$.

### Exercice 2 – Une somme de sinus ★★ 20 min

On considère les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$.

1. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ : $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $v_n - \dfrac{1}{6n^2} \leq u_n \leq v_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

### Exercice 3 – Un produit de cosinus (formule de Viète) ★★ 20 min

Soit $a \in ]0\,;\pi[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = \cos\frac{a}{2} \times \cos\frac{a}{4} \times \cdots \times \cos\frac{a}{2^n}$.

1. Justifier que $\sin\left(\dfrac{a}{2^n}\right) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $P_n = \dfrac{\sin a}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$.
3. En déduire que $(P_n)$ converge et déterminer sa limite.
4. Application : calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)$.

### Exercice 4 – Encadrement de $\sum \frac{1}{k^3}$ par le T.A.F. ★★ 20 min

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$, et $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ pour $x > 0$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ : $\dfrac{2}{(k+1)^3} < f(k) - f(k+1) < \dfrac{2}{k^3}$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2n^2} \leq u_n \leq \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2n^2}$.

3. Montrer que $(u_n)$ est convergente et donner un encadrement de sa limite.

## Exercice 5 – Une somme encadrée par le T.A.F. (Bac 2000) ★★★ 25 min

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

1. On considère $f : x \mapsto \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ sur $[0\,;+\infty[$. En appliquant le théorème des accroissements finis à $f$ sur $[k\,;k+1]$, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ : $\sqrt{k} \leq \dfrac{2}{3}\Big((k+1)^{\frac{3}{2}} - k^{\frac{3}{2}}\Big) \leq \sqrt{k+1}$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $u_n - \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3n\sqrt{n}} \leq u_n - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

3. En déduire que $(u_n)$ est convergente et calculer sa limite.

## Exercice 6 – Une somme de racines cubiques encadrée par le T.A.F. ★★★ 25 min

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt[3]{k}$.

1. On considère $f : x \mapsto \dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$ sur $[0\,;+\infty[$.

   a) Montrer que $f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et que $f'(x) = \sqrt[3]{x}$ pour tout $x > 0$.

   b) En appliquant le théorème des accroissements finis à $f$ sur $[k\,;k+1]$, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ : $\sqrt[3]{k} \leq \dfrac{3}{4}\Big((k+1)^{\frac{4}{3}} - k^{\frac{4}{3}}\Big) \leq \sqrt[3]{k+1}$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $u_n - \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{4n\sqrt[3]{n}} \leq u_n - \dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}}$.

3. En déduire que $(u_n)$ est convergente et calculer sa limite.

4. Application : déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \cdots + \sqrt[3]{n}}{n^{\frac{4}{3}}}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt[3]{\frac{k}{n}}$.

## Exercice 7 – Généralisation : sommes de racines $p$-ièmes ★★★ 30 min

Soit $p$ un entier naturel tel que $p \geq 2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt[p]{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt[p]{k}$.

1. On considère $f_p : x \mapsto \dfrac{p}{p+1}\, x^{\frac{p+1}{p}}$ sur $[0\,;+\infty[$.

   a) Montrer que $f_p$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et que $f_p'(x) = \sqrt[p]{x}$ pour tout $x > 0$.

   b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ : $\sqrt[p]{k} \leq f_p(k+1) - f_p(k) \leq \sqrt[p]{k+1}$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $u_n - \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{p}{p+1} - \dfrac{p}{(p+1)\,n\sqrt[p]{n}} \leq u_n - \dfrac{1}{n\sqrt[p]{n}}$.

3. En déduire que $(u_n)$ converge et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{p}{p+1}$.

**4.** a) Vérifier que l'on retrouve le résultat de l'exercice 5 (Bac 2000) pour $p = 2$ et celui de l'exercice 6 pour $p = 3$.

b) On note $\ell_p$ la limite obtenue. Étudier la monotonie de la suite $(\ell_p)_{p\geq 2}$ et calculer $\lim\limits_{p\to+\infty} \ell_p$. Interpréter ce résultat.

## Exercice 8 – Questions de concours (ENSAM) ★★★ 30 min

Les questions suivantes sont indépendantes.

**1.** Calculer en fonction de $n$ : $S_n = \sum_{k=1}^{n}(2k+7)$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k + 3^{k+2}}{5^{k+1}}$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

**2.** Calculer $\lim\limits_{x\to 0} x^2\Big(1+2+3+\cdots+E\Big(\frac{1}{|x|}\Big)\Big)$.

**3.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(kx)$ (on discutera selon $x$).

**4.** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod_{k=2}^{n}\Big(1-\frac{1}{k^2}\Big)$.

**5.** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, où $u_1 = \sqrt{2}$, $u_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $u_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, ..., $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

Fin de la série • Bon travail • Collection Maths Élites

# Maths Élites

Terminale Sciences Mathématiques • 2026 / 2027

# Série d'exercices n° 3 sur les suites

## Suites adjacentes et suites couplées

| Durée indicative | Classe | Année | Auteur | Exercices |
|---|---|---|---|---|
| ≈ 2 h 50 | 2e Bac SM | 2026 / 2027 | R. Abed | 6 |

## Feuille de route du thème

### Règle générale – à savoir

- **Suites monotones** : croissante majorée (décroissante minorée) $\Rightarrow$ convergente ; croissante non majorée $\Rightarrow +\infty$. Une suite croissante de limite $\ell$ vérifie $u_n \leq \ell$.
- **Adjacentes** : $(u_n)$ croissante, $(v_n)$ décroissante, $v_n - u_n \to 0 \Rightarrow$ même limite $\ell$ et $u_n \leq \ell \leq v_n$ pour tout $n$.
- **Moyennes** : $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ ; $\frac{3}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}} \leq \sqrt[3]{pqr} \leq \frac{p+q+r}{3}$ $(p, q, r > 0)$.

### Méthode – démontrer que deux suites sont adjacentes

1. Monotonie : signe de $u_{n+1} - u_n$, ou $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ comparé à 1 si $u_n > 0$.
2. Simplifier $v_n - u_n$ et montrer qu'il tend vers 0 (ou $0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq k(v_n - u_n)$ avec $k < 1$).
3. Conclure en citant le théorème ; utiliser $u_n \leq \ell \leq v_n$ pour **encadrer** $\ell$.

*Exemple* : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ : $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$, $v_n - u_n = \frac{1}{n} \to 0$ : adjacentes, et $1 \leq \ell \leq 2$.

### Astuce

- Suites couplées : chercher un **invariant** ($v_n - u_n$, $u_n + v_n$, $u_n v_n$ constant).
- Une somme comparée à une « primitive » ($\sum \frac{1}{k}$ et $\ln n$, $\sum \frac{1}{1+k^2}$ et $\arctan n$) donne deux suites monotones grâce au T.A.F.
- Dichotomie : $v_n - u_n = \frac{b-a}{2^n}$ et $u_n \leq \alpha \leq v_n$.

### Pièges

Oublier l'une des **trois** conditions ; vouloir « calculer » la limite commune alors que le théorème n'en donne que l'**existence**.

## Exercices

### Exercice 1 – La dichotomie (Bac 1993) ★★ 25 min

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + x - 1$.

1. a) Dresser le tableau de variations de $f$.

   b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$, et que $0 < \alpha < 1$.

2. On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $m_n = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n \text{ et } v_{n+1} = m_n & \text{si } f(m_n) > 0, \\ u_{n+1} = m_n \text{ et } v_{n+1} = v_n & \text{si } f(m_n) \leq 0. \end{cases}$$

   a) Calculer $u_1$, $v_1$, $u_2$ et $v_2$.

   b) Montrer que $0 \leq u_n \leq 1$ et $0 \leq v_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   c) Montrer que $(u_n)$ est majorée par $\alpha$ et que $(v_n)$ est minorée par $\alpha$.

   d) Montrer que $(u_n)$ est croissante et que $(v_n)$ est décroissante.

   e) Montrer que $v_n - u_n = \dfrac{1}{2^n}$, puis que $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes ; déterminer leur limite.

### Exercice 2 – Les suites d'Archimède ★★ 25 min

Soit $\theta \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$. On considère les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^{n+1} \sin\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$ et $v_n = 2^{n+1} \tan\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$.

1. On pose $x_n = \dfrac{\theta}{2^{n+1}}$. Montrer que $u_n = u_{n+1} \cos x_n$ et en déduire que $(u_n)$ est croissante.

2. À l'aide de $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$, montrer que $v_n = \dfrac{v_{n+1}}{1 - \tan^2 x_n}$ et en déduire que $(v_n)$ est décroissante.

3. Montrer que $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes. En déduire qu'elles convergent et calculer leur limite commune.

### Exercice 3 – Deux suites à différence constante ★★★ 25 min

Soient $a, b$ deux réels tels que $0 < a < b$. On définit les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n}, \qquad v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $v_{n+1} - u_{n+1} = v_n - u_n$. En déduire $v_n$ en fonction de $u_n$, $a$ et $b$.

3. Montrer que $(u_n)$ est strictement décroissante, puis qu'elle converge.

4. Déterminer les limites de $(u_n)$ et de $(v_n)$.

5. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\dfrac{u_n}{u_n + v_n} \leq \dfrac{a}{a + b}$.

**b)** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $0 < u_n \leq a\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^n$.

## Exercice 4 – Suites adjacentes et arctangente ★★★ 25 min

Soient $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ les suites définies par

$$\forall n \geq 2, \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1+k^2} - \arctan n \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1+k^2} - \arctan(n-1).$$

1. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $\forall x \geq 1, \quad \arctan(x+1) - \arctan x \leq \dfrac{1}{x^2+1} \leq \arctan x - \arctan(x-1)$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes.
3. On note $\ell$ leur limite commune. Montrer que $\dfrac{1}{2} - \arctan 2 \leq \ell \leq \dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{4}$.

## Exercice 5 – Série harmonique et constante d'Euler ★★★ 35 min

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction ln sur $[n\,;n+1]$, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$
2. **a)** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $H_n > \ln(n+1)$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n$.
   **b)** *Autre méthode.* Montrer que $H_{2n} - H_n \geq \dfrac{1}{2}$ et retrouver que $(H_n)$ diverge.
3. On pose $a_n = H_n - \ln n$ et $b_n = H_n - \ln(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   **a)** Montrer que $(a_n)$ est décroissante et que $(b_n)$ est croissante.
   **b)** Montrer que $(a_n)$ et $(b_n)$ sont adjacentes. On note $\gamma$ leur limite commune (*constante d'Euler*).
   **c)** Montrer que $1 - \ln 2 \leq \gamma \leq 1$.
4. Montrer que $H_{2n} - H_n = a_{2n} - a_n + \ln 2$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\right)$.

## Exercice 6 – Trois moyennes ★★★★ 35 min

1. Soient $x, y, z$ trois réels positifs.
   **a)** Vérifier que $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \dfrac{1}{2}(x+y+z)\Big[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\Big]$.
   **b)** En déduire que pour tous réels $p, q, r > 0$ : $\dfrac{3}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}} \leq \sqrt[3]{pqr} \leq \dfrac{p+q+r}{3}$.
2. Soient $u_0, v_0, w_0$ trois réels tels que $0 < u_0 < v_0 < w_0$. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$$\frac{3}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n}, \qquad v_{n+1} = \sqrt[3]{u_n v_n w_n}, \qquad w_{n+1} = \frac{u_n + v_n + w_n}{3}.$$

**a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les réels $u_n$, $v_n$, $w_n$ sont bien définis, strictement positifs, et que $u_n \leq v_n \leq w_n$.

**b)** Montrer que $(u_n)$ est croissante et que $(w_n)$ est décroissante.

**c)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $0 \leq w_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{2}{3}(w_n - u_n)$.

**d)** En déduire que les trois suites $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ convergent vers une même limite $L$, et que $u_0 \leq L \leq w_0$.

Fin de la série • Bon travail • Collection Maths Élites

# Maths Élites

Terminale Sciences Mathématiques • 2026 / 2027

# Série d'exercices n° 4 sur les suites

## Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

| Durée indicative | Classe | Année | Auteur | Exercices |
|---|---|---|---|---|
| $\approx$ 3 h 50 | 2e Bac SM | 2026 / 2027 | R. Abed | 8 |

## Feuille de route du thème

### Règle générale – à savoir

- **Point fixe** : si $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_n \to \ell \in I$ et $f$ **continue** en $\ell$, alors $f(\ell) = \ell$.
- **I.A.F.** : si $|f'| \leq k < 1$ sur $I$ (contenant les $u_n$ et $\ell$), alors $|u_{n+1} - \ell| \leq k\,|u_n - \ell|$ et $|u_n - \ell| \leq k^n\,|u_0 - \ell|$.
- **Suites monotones** : croissante majorée ou décroissante minorée $\Rightarrow$ convergente.

### Méthode – plan en cinq temps

1. **Intervalle stable** : $f(I) \subset I$, $u_0 \in I$, puis récurrence (la suite est bien définie).
2. **Monotonie** : si $f$ est croissante, le sens est celui de $u_1 - u_0$ ; sinon, signe de $f(x) - x$ sur $I$.
3. **Convergence** : théorème des suites monotones.
4. **Limite** : résoudre $f(\ell) = \ell$ dans $I$.
5. **Vitesse** : I.A.F., puis un rang $n_0$ à l'aide de ln.

*Exemple* : $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ : $[0\,;2]$ stable, $(u_n)$ croissante, $\ell = 2$, et $|u_n - 2| \leq 2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$.

### Astuce

- $f$ **décroissante** : $(u_n)$ n'est pas monotone ; $f \circ f$ est croissante, d'où $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ monotones de sens contraires.
- Sans dérivée : factoriser $u_{n+1} - \ell = f(u_n) - f(\ell)$ (Héron : $u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n}$).
- Récurrence par $f^{-1}$ : $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ ; changement de suite $w_n = \ln u_n$ pour $u_{n+1} = \sqrt{a\,u_n}$.

### Pièges

Passer à la limite sans la continuité de $f$ ni $\ell \in I$ ; croire que « $f$ croissante $\Rightarrow$ $(u_n)$ croissante » ; écrire $\sqrt[3]{x}$ pour $x < 0$.

## Exercices

### Exercice 1 – Une récurrence avec une racine cubique ★★ 20 min

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt[3]{3u_n + 1} - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $0 \leq u_n \leq 1$.
2. Étudier la monotonie de $(u_n)$ ; en déduire qu'elle converge, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

### Exercice 2 – Une suite majorée par une somme géométrique (Bac 1999) ★★ 25 min

Soit $\alpha$ un réel de l'intervalle $]0\,;1[$. On considère les suites définies par $a_n = (1-\alpha)^n$ et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

1. Montrer que $(a_n)$ et $(S_n)$ sont convergentes et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
2. On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 > 1$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{a_n}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_n > 0$.
   b) Montrer que $(u_n)$ est strictement croissante.
   c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_n \leq u_0 + \dfrac{1}{\alpha u_0}$ ; en déduire que $(u_n)$ est convergente.

### Exercice 3 – Une suite récurrente non monotone de limite $\sqrt{2}$ ★★ 30 min

On considère la fonction $f$ définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{1+x}$ et la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $u_1$ et $u_2$ ; en déduire que $(u_n)$ n'est pas monotone.
2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_n \geq 1$.
   b) Calculer $f(\sqrt{2})$, puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \dfrac{1}{4}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$.
   c) En déduire que $(u_n)$ est convergente et calculer sa limite.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\alpha_n = u_{2n}$ et $\beta_n = u_{2n+1}$.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\beta_n = 1 + \dfrac{1}{1+\alpha_n}$ et $\alpha_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+\beta_n}$.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\alpha_n \leq \sqrt{2} \leq \beta_n$. En déduire que $\alpha_n \leq \beta_n$.
   c) En étudiant $g = f \circ f$, montrer que $(\alpha_n)$ est croissante et $(\beta_n)$ décroissante. En déduire qu'elles sont convergentes et préciser leur limite.

### Exercice 4 – Deux suites récurrentes adjacentes ★★★ 30 min

Soit $f$ la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt[3]{9(x-1)}$.

1. a) Montrer que $f$ est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et calculer $f'(x)$.
   b) Montrer que pour tout $x \in [2\,;3]$ : $0 < f'(x) \leq \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$, et que $f([2\,;3]) \subset [2\,;3]$.

2. On considère les suites définies par $u_0 = 2$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et $v_0 = 3$, $v_{n+1} = f(v_n)$.
   a) Montrer que $(u_n)$ est croissante et que $(v_n)$ est décroissante.
   b) Montrer que $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.
   c) Montrer que leur limite commune $\ell$ est l'unique solution dans $[2\,;3]$ de l'équation $x^3 - 9x + 9 = 0$.

## Exercice 5 – Récurrence par une fonction réciproque ★★★ 30 min

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \arctan x + 2x - 1$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $f'(x) > 2$.
2. Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}$, et que $\alpha \in ]0\,;1[$.
4. Montrer que pour tout $x \in ]\alpha\,;+\infty[$ : $f(x) > x$.
5. Soit $b > \alpha$ et $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = b$ et $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_n > \alpha$.
   b) Montrer que $(u_n)$ est décroissante, puis qu'elle est convergente.
6. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_{n+1} - \alpha \leq \dfrac{1}{2}(u_n - \alpha)$.
   b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

## Exercice 6 – La suite $u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$ et le nombre d'or ★★★ 35 min

On considère la fonction $f$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$, et $I = [\frac{1}{2}\,;1]$.

1. Calculer $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$. Montrer que $f(I) \subset I$, puis que $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $I$ une unique solution $\ell$, que l'on déterminera.
3. a) Montrer que pour tout $x \in I$ : $|f'(x)| \leq \dfrac{4}{9}$.
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $|u_{n+1} - \ell| \leq \dfrac{4}{9}|u_n - \ell|$, puis que $|u_n - \ell| \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$.
   c) En déduire que $(u_n)$ converge et préciser sa limite.
4. Soit $g = f \circ f$.
   a) Montrer que pour tout $x \in I$ : $g(x) = \dfrac{1+x}{2+x}$, et que $g$ est strictement croissante sur $I$.
   b) Montrer que $(v_n)$ est décroissante et que $(w_n)$ est croissante.
   c) Montrer que $(v_n)$ et $(w_n)$ sont adjacentes. (*La suite $(u_n)$ n'est donc pas monotone.*)
5. On définit la suite de Fibonacci par $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Montrer que $u_n = \dfrac{F_n}{F_{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$.

## Exercice 7 – La méthode de Héron pour $\sqrt{2}$ ★★★ 30 min

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(u_n)$ est bien définie et que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$. En déduire que $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout $n$.
3. Montrer que $(u_n)$ est décroissante. En déduire qu'elle converge et déterminer sa limite.
4. On pose $e_n = u_n - \sqrt{2}$.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $0 \leq e_{n+1} \leq \frac{1}{2} e_n^2$.
   b) Montrer que $e_0 \leq \frac{3}{5}$, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $e_n \leq 2\left(\frac{3}{10}\right)^{2^n}$.
   c) En déduire que $u_4$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à $10^{-8}$ près.

## Exercice 8 – Point fixe et accroissements finis (Bac 1998) ★★★ 30 min

Soit $h$ la fonction définie sur $I = [0\,;\frac{\pi}{2}]$ par $h(x) = \sqrt{\dfrac{2}{1+\sin x}}$.

1. a) Montrer que pour tout $x \in I$ : $h'(x) = \dfrac{-\cos x}{\sqrt{2}\,(1+\sin x)^{\frac{3}{2}}}$.
   b) Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet une unique solution $\alpha$ dans $I$.
   c) Montrer que pour tout $x \in I$ : $|h'(x)| \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
2. Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a) Montrer que $h(I) \subset I$, puis que $0 \leq u_n \leq \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}|u_n - \alpha|$.
   c) En déduire que $(u_n)$ est convergente et préciser sa limite.
   d) Montrer que $1 \leq \alpha \leq \sqrt{2}$, puis déterminer un entier $n_0$ tel que $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ pour tout $n \geq n_0$.

Fin de la série • Bon travail • Collection Maths Élites

# Maths Élites

Terminale Sciences Mathématiques • 2026 / 2027

# Série d'exercices n° 5 sur les suites

## Suites implicites

| Durée indicative | Classe | Année | Auteur | Exercices |
|---|---|---|---|---|
| ≈ 4 h 35 | 2e Bac SM | 2026 / 2027 | R. Abed | 7 + 1 problème |

## Feuille de route du thème

### Règle générale – à savoir

- **Bijection** : $f$ **continue** et **strictement monotone** sur $I \Rightarrow$ bijection de $I$ sur $J = f(I)$ ; pour $\lambda \in J$, l'équation $f(x) = \lambda$ a une unique solution dans $I$.
- **TVI** : $f$ continue sur $[a\,;b]$ et $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow f$ s'annule sur $]a\,;b[$.

### Méthode – étudier $(u_n)$ définie par $f_n(u_n) = 0$

1. **Existence et unicité** : théorème de la bijection (un intervalle de monotonie par solution).
2. **Localisation** : $f_n(a) < 0 < f_n(b)$ et $f_n$ croissante $\Rightarrow a < u_n < b$.
3. **Monotonie** : calculer $f_{n+1}(u_n)$ à l'aide de $f_n(u_n) = 0$, puis comparer à $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$.
4. **Convergence** : suite monotone bornée.
5. **Limite** : passage à la limite, absurde, ou encadrement.

*Exemple* : $x^n + x = 1$ : $u_n \in\, ]0\,;1[$, $f_{n+1}(u_n) = u_n^n(u_n - 1) < 0$ donc $(u_n)$ croît ; si $\ell < 1$, $u_n^n \le \ell^n \to 0$ et $u_n \to 1$ : absurde, donc $\ell = 1$.

### Astuce

- $0 < u_n \le \alpha < 1 \Rightarrow u_n^n \to 0$ ; prendre le ln d'une relation multiplicative, puis encadrer.
- $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ $(x > 0)$ ; $x_n \arctan \frac{1}{x_n} \to 1$ si $x_n \to +\infty$.
- $y^3 = c < 0$ : écrire $(-y)^3 = -c$, donc $y = -\sqrt[3]{-c}$.

### Pièges

Oublier « continue » ou « strictement » ; confondre $I$ et $J$ ; $\arctan(\tan a) = a$ **seulement** si $a \in\, ]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$ ; comparer $f_{n+1}(u_n)$ à $f_{n+1}(u_{n+1})$ sur le bon intervalle.

## Exercices

### Exercice 1 – Une suite implicite et la tangente ★★ 20 min

Soit $f$ la fonction définie sur $I = ]\frac{\pi}{2}\,;\pi]$ par $f(x) = (1+\tan x)^3 + 1$.

1. Montrer que $f$ réalise une bijection de $I$ sur un intervalle $J$ que l'on déterminera. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $a_n \in I$ tel que $f(a_n) = \dfrac{1}{n}$.
2. Calculer $a_1$.
3. Étudier la monotonie de la suite $(a_n)$ ; en déduire qu'elle est convergente.
4. Montrer que $\tan a_n = -1 - \sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}$ pour tout $n \geq 1$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

### Exercice 2 – La suite implicite $x^3 + 5x = n$ ★★ 25 min

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^3 + 5x - 1$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}^+$ et que $0 < \alpha < \dfrac{1}{5}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Montrer que l'équation $x^3 + 5x = n$ admet une unique solution $\beta_n$ dans $\mathbb{R}^+$, et que $\beta_n \geq \alpha$.
   b) Montrer que $(\beta_n)$ est croissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = +\infty$.
   c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $\beta_n \leq \sqrt[3]{n}$.
   d) Montrer que pour tout $n \geq 12$ : $\beta_n \geq \sqrt[3]{n - 5\sqrt[3]{n}}$, puis en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\beta_n}{\sqrt[3]{n}} = 1$.

### Exercice 3 – Une suite implicite : $x^n \ln x = 1$ ★★★ 25 min

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $f_n$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f_n(x) = x^n \ln x$.

1. Montrer que $f_n(x) \leq 0$ pour tout $x \in ]0\,;1]$.
2. Montrer que $f_n$ réalise une bijection de $]1\,;+\infty[$ sur $]0\,;+\infty[$. En déduire que l'équation $f_n(x) = 1$ admet dans $]0\,;+\infty[$ une unique solution $u_n$, et que $u_n > 1$.
3. Montrer que $1 < u_1 < 2$.
4. Calculer $f_{n+1}(u_n)$ et en déduire que la suite $(u_n)$ est strictement décroissante. Justifier qu'elle converge.
5. On note $\ell$ sa limite. Montrer que $\ell \geq 1$, puis, en raisonnant par l'absurde, que $\ell = 1$.
6. a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^n = +\infty$.
   b) En utilisant l'inégalité $\ln x \leq x - 1$ $(x > 0)$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n(u_n - 1) = +\infty$.

### Exercice 4 – La suite implicite $x^n + x^2 + x = 1$ ★★★ 25 min

Soit $n$ un entier tel que $n \geq 3$. On considère la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = x^n + x^2 + x - 1$, et l'on note $\alpha$ la solution positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.

1. Sans calculer $\alpha$, montrer que $0 < \alpha < 1$.
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}^+$ une unique solution, notée $U_n$.
3. Montrer que pour tout $n \geq 3$ : $0 < U_n < \alpha$.
4. Montrer que $(U_n)_{n\geq 3}$ est croissante et convergente.
5. Montrer que pour tout $n \geq 3$ : $U_n^n + (U_n - \alpha)\left(U_n + \dfrac{1}{\alpha}\right) = 0$, puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

## Exercice 5 – Deux suites implicites de limite 1 ★★★ 35 min

Soit $n$ un entier tel que $n \geq 3$. On considère la fonction $f_n$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f_n(x) = x^n - n(x-1) - 2$.

1. Étudier les variations de $f_n$.
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions $a_n$ et $b_n$ dans $[0\,;+\infty[$, et que $0 < a_n < 1 < b_n$.
3. a) Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour $x \geq 0$.
   b) En déduire la monotonie de $(a_n)$ et celle de $(b_n)$.
4. Montrer que pour tout $n \geq 3$ : $-\dfrac{2}{n} < a_n - 1 < -\dfrac{1}{n}$ ; en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.
5. a) Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $n \geq 3$ : $(1+x)^n \geq 1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2}x^2$.
   b) En déduire le signe de $f_n\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)$.
   c) Montrer que $(b_n)$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

## Exercice 6 – Étude de fonction et suite implicite (DS 2021/2022) ★★★ 45 min

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\arctan\left(\sqrt{x}\right)$ si $x \geq 0$ et $f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2+1}$ si $x < 0$.

**Partie I.**

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. a) Montrer que $f$ est continue en $x_0 = 0$.
   b) Étudier la dérivabilité de $f$ à droite et à gauche en 0 et interpréter géométriquement les résultats.
3. a) Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et en déduire que $f$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ et sur $]-\infty\,;0[$.
   b) Dresser le tableau de variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.
4. a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - 2x) = 1$ et interpréter géométriquement le résultat.
   b) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**Partie II.** Soit $n$ un entier naturel tel que $n \geq 2$.

5. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{x+1}{n}$ admet une unique solution $a_n$ dans l'intervalle $]0\,;1[$.
6. Montrer que $(a_n)$ est décroissante ; en déduire qu'elle est convergente.

7. a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $\forall x > 0,\ \dfrac{x}{1+x^2} \leq \arctan x$.

   b) En déduire que pour tout $n \geq 2$ : $\dfrac{2\sqrt{a_n}}{1+a_n} \leq \dfrac{a_n+1}{n}$.

   c) Montrer que $0 < \sqrt{a_n} < \dfrac{2}{n}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

## Exercice 7 – La suite implicite $\arctan x - \frac{n}{x} = \frac{\pi}{2} - 1$ ★★★ 40 min

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $f_n$ définie sur $I = ]0\,;+\infty[$ par $f_n(x) = \arctan x - \dfrac{n}{x}$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = \dfrac{\pi}{2} - 1$ admet une unique solution $x_n$ dans $I$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $x_n > n$ ; en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
4. a) Montrer que pour tout $x > 0$ : $\arctan x < x$.

   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $f_n(n+\sqrt{n}) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right) - \dfrac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$.

   c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $x_n < n+\sqrt{n}$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n}$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $\arctan\left(\dfrac{1}{x_n}\right) = 1 - \dfrac{n}{x_n}$ ; en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n - n)$.
6. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2(\arctan x_n - \arctan n) = 1$.

## Problème de synthèse – Une suite définie implicitement ★★★★ 60 min

Soit $n$ un entier naturel tel que $n \geq 2$. On considère la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{n} - \mathrm{e}^{-nx}$, et $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

### Partie A – Étude de la fonction $f_n$

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$.

   b) Montrer que la droite $(\Delta_n)$ : $y = \dfrac{x}{n}$ est asymptote à $(\mathcal{C}_n)$ au voisinage de $+\infty$ et préciser la position relative de $(\mathcal{C}_n)$ et $(\Delta_n)$.

   c) Étudier la branche infinie de $(\mathcal{C}_n)$ au voisinage de $-\infty$.
2. Calculer $f_n'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de $f_n$.

### Partie B – Existence et encadrement de $\alpha_n$

3. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution, notée $\alpha_n$.
4. a) Montrer que $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) < 0$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $\mathrm{e}^x \geq x+1$. En déduire que $f_n(1) > 0$.

c) En déduire que $\dfrac{1}{n} < \alpha_n < 1$.

**5.** Construire $(\mathcal{C}_2)$ et $(\Delta_2)$ (on prendra $\alpha_2 \approx 0{,}6$).

## Partie C – Monotonie et convergence de $(\alpha_n)$

**6.** a) Montrer que $\mathrm{e}^{-n\alpha_n} = \dfrac{\alpha_n}{n}$, puis que $f_{n+1}(\alpha_n) = \dfrac{n\,\mathrm{e}^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1}\left(\mathrm{e}^{\alpha_n} - 1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

b) En déduire que $f_{n+1}(\alpha_n) > 0$.

c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante, puis qu'elle est convergente.

## Partie D – Limite et comportement asymptotique

**7.** a) Montrer que pour tout $n \geq 2$ : $\dfrac{1}{n^2} < \mathrm{e}^{-n\alpha_n} < \dfrac{1}{n}$.

b) En déduire que pour tout $n \geq 2$ : $\dfrac{\ln n}{n} < \alpha_n < \dfrac{2\ln n}{n}$, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

**8.** a) Montrer que pour tout $n \geq 2$ : $n\alpha_n = \ln n - \ln \alpha_n$.

b) En utilisant l'encadrement de la question 7.b), montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln \alpha_n}{\ln n} = -1$.

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\alpha_n}{\ln n}$. Laquelle des deux bornes de 7.b) est la plus précise ?

Fin de la série • Bon travail • Collection Maths Élites