



Maths Elites

Excellence en Mathématiques | Terminale Sciences Mathématiques

Prof. R. Abed — Agrégé de Mathématiques

RÉVISION 1^{re} BAC SM • Cours

Partie II

Calcul des limites

Cap sur la Terminale SM — Recueil de révision

Cours

Chapitre 3 — Stratégie générale face à une limite

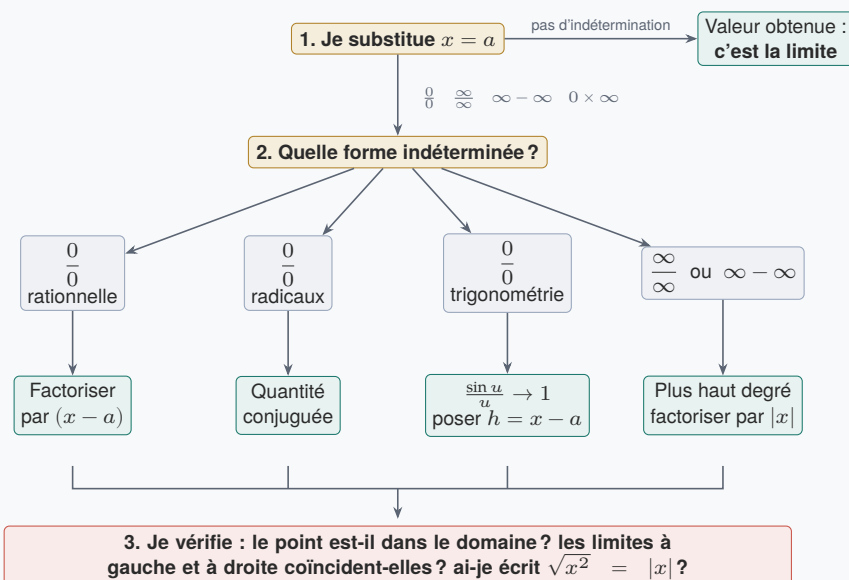
À retenir — Les quatre questions à se poser, dans cet ordre

1. **Y a-t-il vraiment une indétermination ?** Substituez d'abord. Dans 60 % des cas, la limite s'obtient par simple substitution.
2. **De quelle forme s'agit-il ?** $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 .
3. **Quel est l'outil adapté à cette forme ?** (voir le tableau ci-dessous)
4. **Ai-je le droit de conclure ?** Limite à gauche = limite à droite ? Le domaine autorise-t-il ce voisinage ?

Boîte à outils — Tableau de décision

Forme	Contexte	Outil
$\frac{0}{0}$	fraction rationnelle	Factoriser par $(x-a)$; division euclidienne; $a^n - b^n$
$\frac{0}{0}$	présence de radicaux	Multiplier par la quantité conjuguée
$\frac{0}{0}$	on reconnaît $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$	Taux d'accroissement : la limite est $f'(a)$
$\frac{0}{0}$	trigonométrie	$\frac{\sin u}{u} \rightarrow 1$, $\frac{1 - \cos u}{u^2} \rightarrow \frac{1}{2}$
$\frac{\infty}{\infty}$	polynômes / rationnelles	Termes de plus haut degré
$\infty - \infty$	radicaux	Quantité conjuguée, puis factoriser par $ x $
$0 \times \infty$	produit borné $\times$ quelque chose	Encadrement (théorème des gendarmes)

Face à une limite : l'arbre de décision



Suivez toujours cet ordre. La dernière étape n'est pas facultative : c'est elle qui distingue une réponse juste d'une réponse « presque juste ».

Piège à éviter — La faute la plus coûteuse

$\sqrt{x^2} = |x|$ et **non** x . Lorsqu'on factorise sous une racine au voisinage de $-\infty$:

$$\sqrt{4x^2 - 3x + 2} = |x| \sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = \begin{cases} x \sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} & \text{si } x \rightarrow +\infty, \\ -x \sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} & \text{si } x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Oublier le signe en $-\infty$ est l'erreur numéro un des copies de Terminale.

1. Limites de fonctions rationnelles**Méthode — Forme $\frac{0}{0}$ pour une fraction rationnelle**

Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ est de la forme $\frac{0}{0}$, alors a est racine à la fois de P et de Q . Donc $(x - a)$ divise P et Q :

$$P(x) = (x - a)P_1(x), \quad Q(x) = (x - a)Q_1(x), \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \quad (x \neq a).$$

On recommence tant que la forme reste indéterminée.

Trois façons d'obtenir P_1 : division euclidienne posée, schéma de Horner (le plus rapide), ou identification des coefficients.

Astuce — Horner en dix secondes

Pour diviser $x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1$ par $x - 1$, on aligne les coefficients 1, -2, 1, 1, -1 et on « descend-multiplie-additionne » par 1 :

$$1 \rightarrow 1 \cdot 1 - 2 = -1 \rightarrow -1 \cdot 1 + 1 = 0 \rightarrow 0 \cdot 1 + 1 = 1 \rightarrow 1 \cdot 1 - 1 = 0.$$

Le dernier nombre est le **reste** (ici $0 : 1$ est bien racine) et les précédents sont les coefficients du quotient : $x^3 - x^2 + 0x + 1$.

Astuce — Factorisation « à vue » par groupement

Dans la question 2, on a repéré $x^3 - 2x^2 + x - 2 = x^2(x - 2) + 1 \cdot (x - 2)$: le groupement par paires évite toute division. Cherchez-le systématiquement sur les polynômes de degré 3 à 4 dont les coefficients se répètent.

Théorème — La limite fondamentale

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^*$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}, \quad \text{en particulier} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = n.$$

Méthode — Le quotient de deux limites fondamentales

Pour $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^p - 1}{x^q - 1}$, on **divise haut et bas** par $x - 1$:

$$\frac{x^p - 1}{x^q - 1} = \frac{\frac{x^p - 1}{x - 1}}{\frac{x^q - 1}{x - 1}} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{p}{q}.$$

Astuce à mémoriser : « la limite est le rapport des exposants ».

Piège à éviter

En question 4, si l'un des exposants avait été *pair*, le dénominateur ne se serait pas annulé en -1 et il n'y aurait eu aucune indétermination. **Vérifiez toujours que vous avez bien affaire à une forme $\frac{0}{0}$** avant de dégainer une technique.

Astuce — « Découper la somme »

Le coup de génie de la question 1 est d'écrire $n = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n$ pour appairer chaque 1 avec un x^k . Chaque fois qu'une constante entière apparaît en face d'une somme de n termes, essayez ce découpage.

Chapitre 4 — Expressions irrationnelles : la quantité conjuguée

Méthode — La quantité conjuguée

On utilise l'identité $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ pour *faire disparaître* les racines :

$$\sqrt{u} - \sqrt{v} = \frac{u - v}{\sqrt{u} + \sqrt{v}}, \quad \sqrt{u} - c = \frac{u - c^2}{\sqrt{u} + c}.$$

Où multiplier ? Là où se trouve l'indétermination : au numérateur si $\frac{0}{0}$ vient du haut, au dénominateur sinon, aux *deux* si les deux sont concernés.

Astuce — Racines cubiques

Pour $\sqrt[n]{u} - \sqrt[n]{v}$, la conjuguée est $A^2 + AB + B^2$, car $(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$. Plus généralement, avec $A = \sqrt[n]{u}$: multiplier par $\sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k} B^k$. C'est encore la factorisation de $a^n - b^n$ du Chapitre 2 !

2. Formes $\infty - \infty$ à l'infini

Méthode — Le protocole en trois temps

Pour $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{P(x)} - \alpha x - \beta)$ avec P de degré 2 :

- Comparer les termes dominants.** $\sqrt{ax^2 + bx + c} \sim |x|\sqrt{a}$. Si $\sqrt{a} \neq |\alpha|$ (au signe près), la limite est $\pm\infty$: c'est fini.
- Si les termes dominants se compensent**, conjuguer : $\sqrt{P(x)} - \alpha x = \frac{P(x) - \alpha^2 x^2}{\sqrt{P(x)} + \alpha x}$.
- Factoriser par x** en haut et par $|x|$ en bas, puis conclure.

Astuce — Le « théorème du taux d'accroissement » déguisé

Dans la question 3, chaque calcul du type $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{u(x)} - \sqrt{u(1)}}{x - 1}$ n'est rien d'autre que la dérivée en 1 de $x \mapsto \sqrt{u(x)}$, c'est-à-dire $\frac{u'(1)}{2\sqrt{u(1)}}$. C'est *beaucoup* plus rapide que de conjuguer terme à terme — on y reviendra en Partie III.

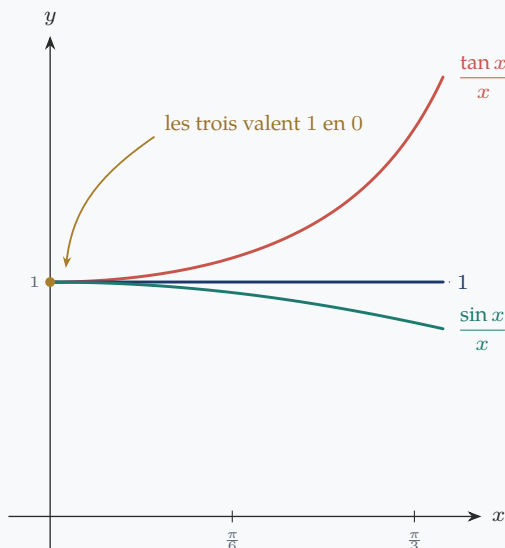
Chapitre 5 — Limites trigonométriques

Boîte à outils — Les trois limites de référence

Pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} = \frac{a^2}{2}.$$

□ Les trois courbes se rejoignent en 1 : voilà pourquoi la limite vaut 1



Sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\sin x < x < \tan x$, donc $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Les deux gendarmes $\cos x$ et 1 tendent vers 1 : le prisonnier n'a pas le choix. Retenez l'image : **près de 0, le sinus est l'identité**.

Méthode — Le changement de variable qui ramène en 0

Toutes ces limites sont *en 0*. Face à $\lim_{x \rightarrow a}$ avec de la trigonométrie, posez systématiquement $\mathbf{h = x - a}$ et développez avec les formules d'addition. Exemple :

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} \stackrel{h=x-\pi}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin h}{h} = -1.$$

Astuce — Les trois identités qui débloquent tout

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}, \quad \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}, \quad \sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}.$$

La deuxième et la troisième transforment une *différence* (forme indéterminée) en *produit* (calculable). Réflexe absolu.

Astuce — Reconnaître $a \sin x + b \cos x$

$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$. Dans la question 5, $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 2 \sin(x - \frac{\pi}{6})$: le point $\frac{\pi}{6}$ où l'on calcule la limite *apparaît directement*. Chaque fois qu'un énoncé fait tendre x vers un angle remarquable, cherchez cette écriture.

Astuce — Le télescopage multiplicatif

La question 4 illustre une technique précieuse : pour évaluer $1 - u_1 u_2 \cdots u_n$ quand chaque $u_k \rightarrow 1$, écrivez

$$1 - \prod_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \left(\prod_{j < k} u_j \right) (1 - u_k).$$

On transforme un produit récalcitrant en *somme* de termes que l'on sait traiter. Cette idée est le cœur de nombreux exercices de concours.

Chapitre 6 — Ordre, encadrements et partie entière

Théorème — Théorème des gendarmes

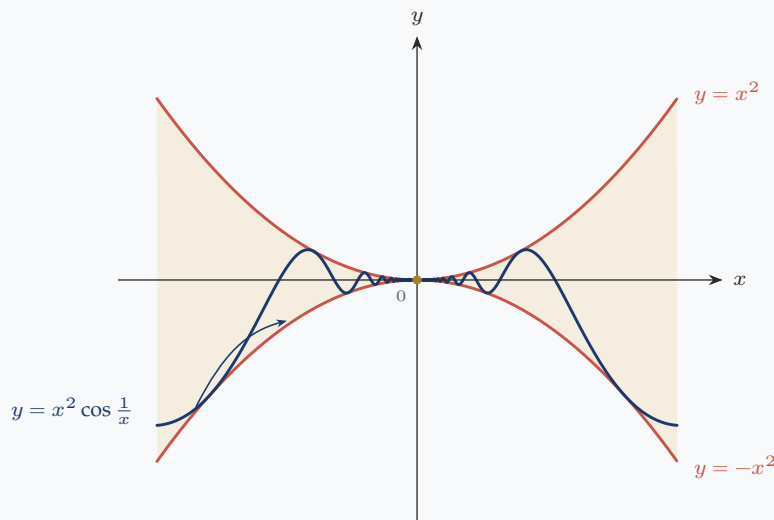
Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ au voisinage de a et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Version « borné $\times$ petit » : si f est **bornée** au voisinage de a et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$.

Piège à éviter

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} = 0$ **ne se démontre pas** en écrivant « $\cos \frac{1}{x} \rightarrow$ quelque chose ». Cette limite *n'existe pas* ! Il faut écrire $|x^2 \cos \frac{1}{x}| \leq x^2 \rightarrow 0$. Un facteur borné n'a pas besoin d'avoir une limite.

Le théorème des gendarmes en action



La courbe oscille une infinité de fois près de 0 : $\cos \frac{1}{x}$ n'a aucune limite. Mais elle est prisonnière du couloir doré, qui se referme sur 0 : la limite du produit est donc 0. Tout l'esprit de la méthode est là — on ne calcule pas, on **enferme**.

Définition — Partie entière

Pour $x \in \mathbb{R}$, $E(x)$ (ou $\lfloor x \rfloor$) est l'unique entier vérifiant

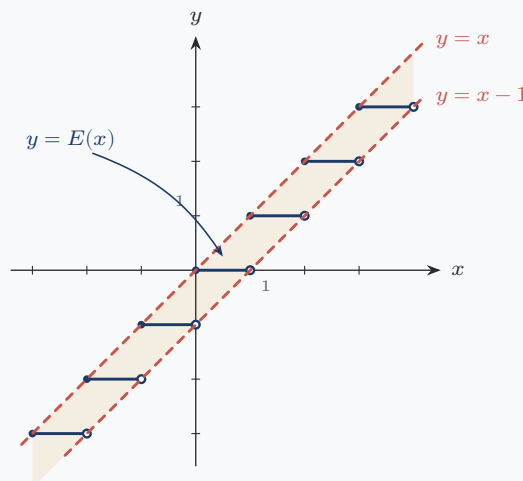
$$E(x) \leq x < E(x) + 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad x - 1 < E(x) \leq x.$$

À retenir — L'encadrement universel

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x - 1 < E(x) \leq x$$

Toute limite contenant une partie entière se traite avec cet encadrement, jamais autrement. C'est le seul outil dont vous disposez : E n'est ni continue, ni monotone au sens strict, ni dérivable.

□ La partie entière, prise en sandwich entre $x - 1$ et x



L'escalier reste toujours dans la bande dorée : $x - 1 < E(x) \leq x$. Divisez cet encadrement par x et faites tendre x vers $+\infty$: les deux bords tendent vers 1, donc $\frac{E(x)}{x} \rightarrow 1$. Un seul dessin, et toutes les limites avec E deviennent évidentes.

Méthode — Limite d'une expression avec E

1. Encadrer $E(u)$ par $u - 1 < E(u) \leq u$.
2. **Multiplier par le facteur restant en surveillant son signe** : c'est ici que se joue tout l'exercice.
3. Faire tendre les deux bornes et appliquer les gendarmes.

Piège à éviter

Étape critique de la question 2 : on multiplie une inégalité par une quantité **négative**, donc le sens de l'inégalité *s'inverse*. Écrivez toujours explicitement le signe du facteur avant de multiplier.

Astuce — La bonne réaction devant E

Ne cherchez jamais à « calculer » E : cherchez sur quel **intervalle** $E(u)$ est constant. Pour $\lim_{x \rightarrow +\infty} xE\left(\frac{1}{x}\right)$, remarquer que $E\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ pour $x > 1$ règle la question en une ligne, sans aucun encadrement.

Astuce — Pourquoi n^2 au dénominateur ?

L'erreur commise en remplaçant chaque $E(kx)$ par kx est au plus 1 par terme, soit au plus n au total. Divisée par n^2 , cette erreur globale tend vers 0 : c'est exactement ce qui rend le calcul possible. Retenez ce raisonnement en « ordre de grandeur de l'erreur », il est fondamental.

Chapitre 7 — Définitions formelles des limites

À retenir

Ces définitions ne servent pas à *calculer* des limites — elles servent à en *démontrer* l'existence quand aucun théorème ne s'applique, et surtout à comprendre ce que signifie « tendre vers ». Elles seront le socle de toute l'analyse en classes préparatoires. Apprenez-les mot à mot.

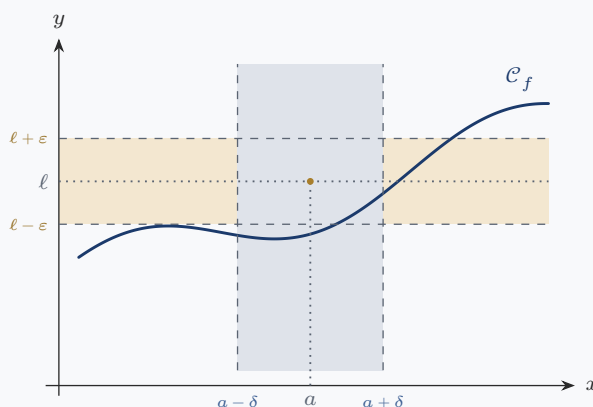
Définition — Limite finie en un point

Soient $a, \ell \in \mathbb{R}$. On dit que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Pour la limite **à droite**, on remplace $|x - a| < \delta$ par $a < x < a + \delta$; pour la limite **à gauche**, par $a - \delta < x < a$.

□ Ce que dit vraiment « $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ »



Règle du jeu : l'adversaire choisit la bande horizontale ε (aussi fine qu'il veut); vous devez répondre par une bande verticale δ telle que tout le morceau de courbe au-dessus de la bande bleue tienne dans la bande dorée. Si vous gagnez à chaque fois, la limite vaut ℓ .

Définition — Limites infinies en un point

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty : \forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| < \delta \implies f(x) > A;$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty : \forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| < \delta \implies f(x) < -A.$$

Interprétation géométrique : la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$.

Définition — Limites à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell : \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x > B \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell : \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x < -B \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty : \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x > B \implies f(x) > A.$$

Les trois autres cas ($\pm\infty$ en $\pm\infty$) s'obtiennent en changeant les signes de façon analogue.

Interprétation géométrique : dans les deux premiers cas, la droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale** à $\mathcal{C}_f$.

Méthode — Comment rédiger une preuve « en ε »

On veut montrer $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5$.

1. *Analyse (au brouillon)* : $|f(x) - 5| = |3x - 6| = 3|x - 2|$. Pour rendre ceci $< \varepsilon$, il suffit que $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$.

2. *Rédaction* : « Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \frac{\varepsilon}{3} > 0$. Alors pour tout x tel que $|x - 2| < \delta$, on a $|f(x) - 5| = 3|x - 2| < 3\delta = \varepsilon$. » ■

La règle absolue : δ est *fabriqué à partir de ε* , jamais l'inverse. On cherche δ au brouillon, on l'annonce dans la copie.

Piège à éviter

Ne jamais écrire « $\exists \delta > 0, \forall \varepsilon > 0$ ». L'ordre des quantificateurs est le contenu de la définition : δ dépend de ε (plus ε est petit, plus δ doit l'être). Inverser l'ordre produit un énoncé faux et vide de sens.

Boîte à outils — la série des 30 limites (Institut BenMbarek)

Avant d'attaquer les 30 limites, on rassemble ici tous les résultats et réflexes utilisés dans la série. **Aucune limite ne se calcule « au hasard »** : on identifie d'abord la *forme* (déterminée ou indéterminée), puis on choisit l'outil adapté.

Boîte à outils — limites usuelles à connaître par cœur

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}, \quad \text{plus généralement} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{n}.$$

Méthode — Les cinq réflexes de la série

1. **Remplacer d'abord x par la valeur visée**. Si l'on obtient un nombre, c'est fini. Sinon on repère la forme indéterminée : $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \times \infty$.
2. **Quotient de racines / différence de racines** $\Rightarrow$ multiplier par la *quantité conjuguée*.
3. **Quotient qui vaut $\frac{0}{0}$ en $x = a$ avec des fonctions dérivables** $\Rightarrow$ reconnaître un *taux d'accroissement* : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$.
4. **Valeur absolue ou partie entière** $\Rightarrow$ étudier *séparément à gauche et à droite*, ou *encadrer*.
5. **En $\pm\infty$ pour une fraction rationnelle** $\Rightarrow$ factoriser (ou garder) le *terme de plus haut degré*.

Rappel de cours

Partie entière. Pour tout réel t , $E(t) \leq t < E(t) + 1$, autrement dit

$$t - 1 < E(t) \leq t.$$

C'est l'encadrement de base : on l'utilise avec le **théorème des gendarmes**. **Théorème des gendarmes** : si $u \leq f \leq v$ au voisinage de a et si u et v tendent vers la même limite ℓ , alors $f \rightarrow \ell$.

Attention

« *Lorsqu'elles existent* » : certaines limites de la série **n'existent pas**. C'est le cas typique quand la limite à gauche et la limite à droite *diffèrent* (souvent à cause d'une valeur absolue ou d'une partie entière), ou quand une fraction devient infinie *avec un changement de signe*. Reconnaître une limite qui n'existe pas fait partie de l'exercice.