



Maths Elites

Excellence en Mathématiques | Terminale Sciences Mathématiques

Prof. R. Abed — Agrégé de Mathématiques

RÉVISION 1^{re} BAC SM • Cours

Partie V

Neuf exercices originaux

Cap sur la Terminale SM — Recueil de révision

Cours

Chapitre 16 — Pour aller plus loin

À retenir

Les exercices de cette partie ne sont pas des exercices d'entraînement de plus : chacun débouche sur un **résultat nommé** que vous retrouverez en Terminale ou en prépa (Vandermonde, Jordan, Hermite, série de Bâle...). Cherchez-les longuement. Un seul de ces exercices, réellement compris, vaut vingt exercices de routine.

Astuce — La méthode des « fonctions génératrices »

Identifier les coefficients de deux écritures d'un même polynôme est une technique d'une puissance considérable : elle démontre en trois lignes des identités qu'un calcul direct rendrait inextricables. Retenez le schéma : « une identité algébrique $\Rightarrow$ une identité combinatoire ».

Remarque

Vous venez de démontrer, à la main, un cas particulier de *comparaison série-intégrale* : $\sum_{k \leq n} k^{-1/2} \sim 2\sqrt{n}$. C'est un résultat que vous reverrez en Sup, démontré avec des intégrales — mais l'encadrement élémentaire ci-dessus est tout aussi rigoureux.

Astuce — Découper avant de conjuguer

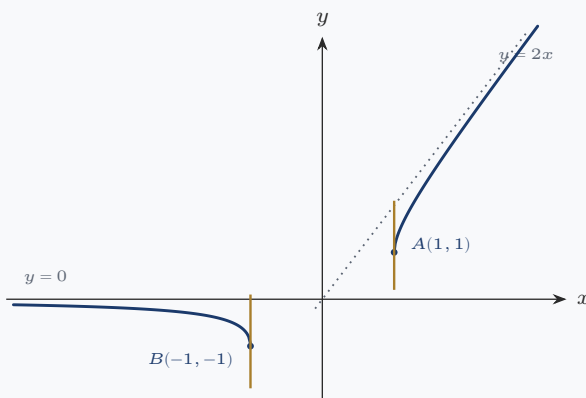
La clé de la question 3 est la décomposition $1 - uv = (1 - u) + u(1 - v)$, appliquée à $u = \cos^2 x$ et $v = \cos(ax)$: elle **sépare les deux sources d'indétermination**, chacune se ramenant ensuite à la limite de référence $\frac{1 - \cos t}{t^2} \rightarrow \frac{1}{2}$.

Règle générale : quand un produit résiste, transformez-le en somme ; quand une somme résiste, factorisez-la.

Astuce — Interprétation géométrique

$\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$ est la *pente* de la corde joignant l'origine au point $(x, \sin x)$ de la sinusoïde. Dire que φ décroît, c'est dire que la courbe du sinus est **concave** sur $[0, \frac{\pi}{2}]$: elle est au-dessus de sa corde ($y = \frac{2x}{\pi}$) et en dessous de sa tangente en 0 ($y = x$). Une inégalité analytique cache toujours une image géométrique : cherchez-la, elle vous fera retenir le résultat.

$$\square \text{ Allure de } \mathcal{C}_f \text{ pour } f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$$



Deux demi-tangentes verticales en A et B, une asymptote oblique $y = 2x$ en $+\infty$ et l'axe des abscisses comme asymptote en $-\infty$.

Remarque — Le problème de Bâle

La limite ℓ vaut exactement $\frac{\pi^2}{6} \approx 1,6449$. Ce résultat, posé en 1650 et resté ouvert pendant 90 ans, fut établi par EULER en 1735 : c'est le *problème de Bâle*. Vos encadrements donnent $1,583 \leq \ell \leq 2$: pas si mal, avec les seuls outils d'un élève de première année !

Astuce — La stratégie « périodicité + un intervalle »

Pour démontrer qu'une fonction bizarre est nulle partout, il suffit souvent de montrer (i) qu'elle est périodique et (ii) qu'elle est nulle sur *une* période. Cette technique en deux temps évite tout calcul général et vaut aussi pour les suites (raisonnement modulo n). Elle est très fréquente en concours.