



Maths Elites

Excellence en Mathématiques | Terminale Sciences Mathématiques

Prof. R. Abed — Agrégé de Mathématiques

RÉVISION 1^{re} BAC SM • Cours

Partie IV

Étude de fonctions

Cap sur la Terminale SM — Recueil de révision

Cours

Chapitre 12 — Branches infinies

Méthode — L'algorithme complet des branches infinies en $+\infty$

On suppose $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$ (sinon, si la limite est ℓ fini, on a une **asymptote horizontale** $y = \ell$).

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

- Si la limite est $\pm\infty$: **branche parabolique de direction** (Oy) .
- Si la limite est 0 : **branche parabolique de direction** (Ox) .
- Si la limite est $a \in \mathbb{R}^*$: on passe à l'étape 2.

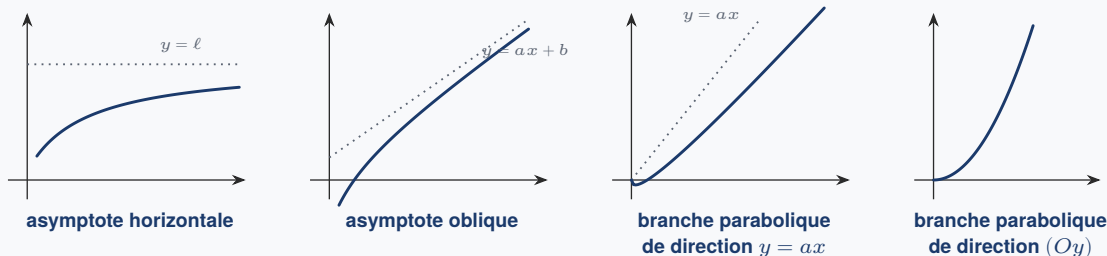
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$.

- Si la limite est $b \in \mathbb{R}$: **asymptote oblique** $y = ax + b$.
- Si la limite est $\pm\infty$: **branche parabolique de direction la droite** $y = ax$.

3. **Position relative** : étudier le signe de $f(x) - (ax + b)$. Positif $\Rightarrow$ courbe au-dessus ; négatif $\Rightarrow$ en dessous.

Le même algorithme s'applique en $-\infty$ — *séparément*, car les résultats diffèrent souvent.

Les quatre types de branches infinies



Dans les deux premiers cas la courbe « colle » à une droite ; dans les deux derniers elle s'en écarte indéfiniment tout en gardant une direction limite.

Piège à éviter

Une **direction asymptotique** n'est pas une **asymptote**. Si $\frac{f(x)}{x} \rightarrow a$ mais $f(x) - ax \rightarrow \pm\infty$, la courbe n'admet *aucune* asymptote : elle possède seulement une branche parabolique. Écrire « asymptote $y = ax$ » dans ce cas est une faute lourde.

Astuce — Trouver une asymptote oblique sans limites

Pour une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ avec $\deg P = \deg Q + 1$, effectuez la **division euclidienne** : $\frac{P}{Q} = ax + b + \frac{R}{Q}$ avec $\deg R < \deg Q$. L'asymptote est $y = ax + b$ et le **signe de $\frac{R}{Q}$** donne **directement la position relative**. Deux résultats pour le prix d'un.

Chapitre 13 — Concavité et points d'inflexion

Définition — Convexité, concavité

Soit f deux fois dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'' \geq 0$ sur I : $\mathcal{C}_f$ est **convexe** sur I (« tournée vers le haut », en forme de cuvette). Elle

est alors *au-dessus* de chacune de ses tangentes.

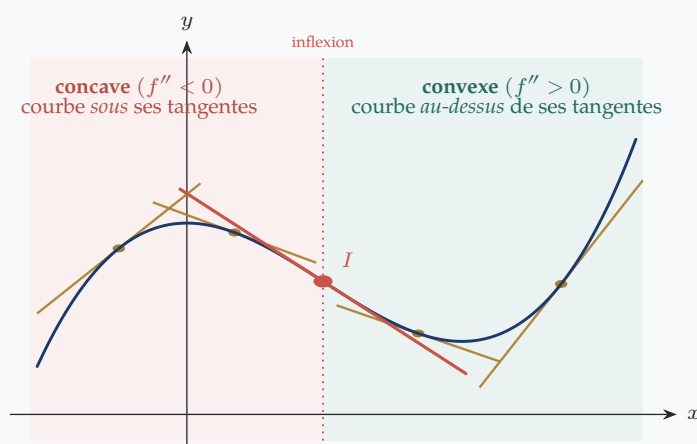
- Si $f'' \leq 0$ sur I : $\mathcal{C}_f$ est **concave** sur I (« tournée vers le bas », en forme de dôme), et *en dessous* de ses tangentes.
- Un point $A(a, f(a))$ où f'' s'annule en changeant de signe est un **point d'inflexion** : la courbe y traverse sa tangente.

Piège à éviter

$f''(a) = 0$ **ne suffit pas** pour avoir un point d'inflexion : il faut un *changement de signe*. Contre-exemple : $f(x) = x^4$ vérifie $f''(0) = 0$, mais $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ partout : la courbe reste convexe, sans inflexion en 0.

Astuce — Mémoriser convexe / concave

☐ Convexe, concave, point d'inflexion : la courbe et ses tangentes



Au point d'inflexion I , et seulement là, la tangente **traverse** la courbe ; partout ailleurs elle reste du même côté. C'est le test visuel infallible — et il explique pourquoi f'' doit changer de signe, et pas seulement s'annuler.

« Convexe » contient un **v** : la courbe a la forme d'un *v*. Et $f'' \geq 0$ signifie que f' croît, donc la pente augmente : la courbe se redresse. Tout est cohérent.

Chapitre 14 — Symétries et périodicité

Propriété — Éléments de symétrie

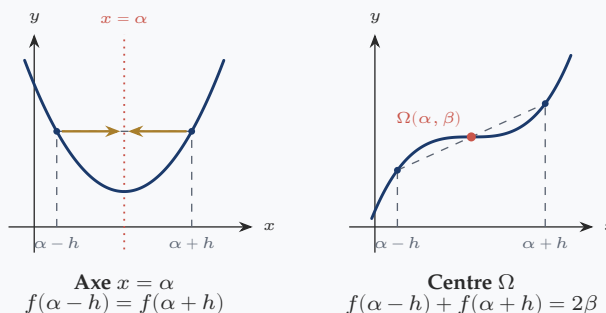
Soit f de domaine $\mathcal{D}_f$.

- Le point $\Omega(\alpha, \beta)$ est **centre de symétrie** de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si

$$\forall h, (\alpha + h \in \mathcal{D}_f \Rightarrow \alpha - h \in \mathcal{D}_f) \quad \text{et} \quad f(\alpha + h) + f(\alpha - h) = 2\beta.$$

- La droite $(\Delta) : x = \alpha$ est **axe de symétrie** de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $f(\alpha + h) = f(\alpha - h)$ pour tout h admissible.

□ Les deux symétries : miroir (axe) et demi-tour (centre)



À gauche, la courbe se replie sur elle-même comme dans un miroir : les deux ordonnées sont égales. À droite, Ω est le milieu du segment joignant les deux points : leurs ordonnées ont pour moyenne β . Repérer une symétrie, c'est diviser par deux le travail d'étude.

Astuce — Deviner le centre de symétrie

Pour une fraction rationnelle, le centre de symétrie a pour abscisse le **pôle** (l'asymptote verticale) et pour ordonnée la valeur correspondante sur l'**asymptote**. Exemple : $f(x) = \frac{2x^2 - x}{x - 1}$ a pour asymptote verticale $x = 1$ et pour asymptote oblique $y = 2x + 1$; le centre est donc $\Omega(1, 3)$... à vérifier par le calcul !

Pour un polynôme de degré 3, le centre de symétrie est *toujours* le point d'inflexion, d'abscisse $-\frac{b}{3a}$.

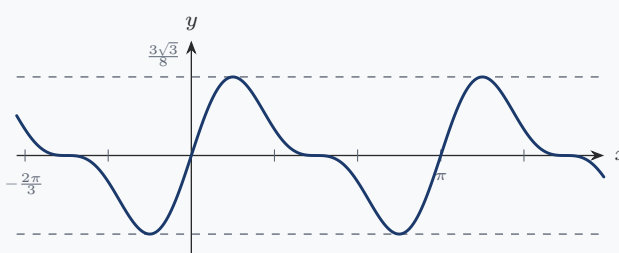
Méthode — Réduire le domaine d'étude

Avant toute étude, cherchez systématiquement :

1. une **périodicité** T : on étudie sur un intervalle de longueur T ;
2. une **parité** : paire $\Rightarrow$ on étudie sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}^+$ puis symétrie d'axe (Oy) ; impaire $\Rightarrow$ symétrie de centre O .

Combinaison des deux peut diviser le travail par 4 ou plus.

□ La courbe de $f(x) = \cos^2 x \sin(2x)$



Fonction impaire et π -périodique : le motif tracé sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ engendre toute la courbe par symétrie puis translations.

Chapitre 15 — Trois problèmes de synthèse

À retenir — Le plan type d'une étude complète

1. Domaine de définition $\mathcal{D}_f$ (et réduction par parité/périodicité).
2. Limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$; continuité et prolongements éventuels.
3. Dérivabilité aux points litigieux ; interprétation géométrique (demi-tangentes).

4. Branches infinies et positions relatives.
5. Dérivée, signe, tableau de variations.
6. Tangentes remarquables, points d'inflexion.
7. Tracé, en plaçant *d'abord* les asymptotes et les tangentes.

Astuce — Reconnaître la forme canonique

Sur $[-1, +\infty[$, on peut écrire $f(x) = x + 2 - 2\sqrt{x+1} = (\sqrt{x+1} - 1)^2$. Tout devient alors évident : $f \geq 0$, f s'annule exactement quand $\sqrt{x+1} = 1$, c'est-à-dire en $x = 0$, et le sens de variation se lit directement. **Cherchez toujours si une expression n'est pas un carré déguisé.**