



Maths Elites

Excellence en Mathématiques | Terminale Sciences Mathématiques

Prof. R. Abed — Agrégé de Mathématiques

RÉVISION 1^{re} BAC SM • Cours

Partie III

Dérivation

Cap sur la Terminale SM — Recueil de révision

Cours

Chapitre 8 — Nombre dérivé et interprétations

Définition — Dérivabilité en un point

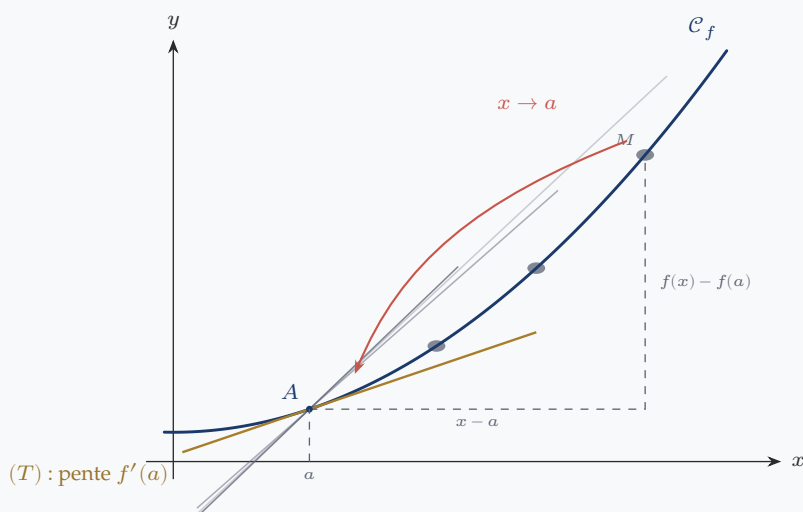
Soit f définie sur un intervalle ouvert contenant a . On dit que f est **dérivable en a** lorsque

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell \in \mathbb{R} \quad \left(\text{ou, en posant } h = x - a, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \ell \right).$$

On note alors $f'(a) = \ell$, appelé **nombre dérivé de f en a** . L'équation de la **tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est

$$(T) : y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

La sécante bascule vers la tangente : naissance du nombre dérivé



Le quotient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est la pente de la sécante (AM) . Quand M glisse vers A , les sécantes basculent vers une position limite : la tangente, de pente $f'(a)$. Voilà pourquoi « dérivée » et « tangente » désignent le même objet.

Propriété — Dérivabilité à droite, à gauche

- $f'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$: demi-tangente à droite, de pente $f'_d(a)$, tracée pour $x \geq a$.
- $f'_g(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$: demi-tangente à gauche, tracée pour $x \leq a$.
- f est dérivable en $a \iff f'_d(a)$ et $f'_g(a)$ existent, sont finies et égales.

À retenir — Vocabulaire des points remarquables

Soit a un point où f est continue mais non dérivable.

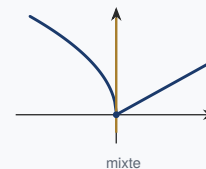
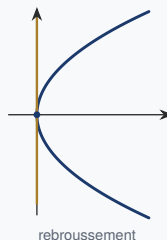
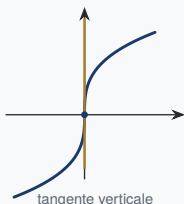
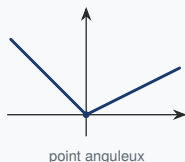
Situation	Nom	Aspect de la courbe
$f'_d(a), f'_g(a)$ finies, distinctes	Point anguleux	Deux demi-tangentes obliques formant un angle
$f'_d(a) = f'_g(a) = \pm\infty$ (même signe)	Tangente verticale	Tangente verticale, courbe « traversante »
$f'_d(a) = +\infty, f'_g(a) = -\infty$ (ou l'inverse)	Point de rebroussement	Deux demi-tangentes verticales du même côté
Une finie, une infinie	Point anguleux (mixte)	Une demi-tangente oblique, une verticale

Méthode — Orienter une demi-tangente verticale

Si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$, la demi-tangente est verticale **vers le haut** ; si la limite est $-\infty$, elle est **vers le bas**. À gauche, tout s'inverse : $\lim_{x \rightarrow a^-} = +\infty$ donne une demi-tangente vers le **bas**.

Mnémotechnique : signes *identiques* (côté et infini) $\Rightarrow$ vers le haut ; signes *opposés* $\Rightarrow$ vers le bas.

Les quatre comportements en un point de non-dérivabilité



De gauche à droite : deux pentes finies distinctes ; deux demi-tangentes verticales de même orientation ; deux demi-tangentes verticales opposées ; une pente finie et une demi-tangente verticale.

Piège à éviter

« f dérivable $\Rightarrow f$ continue » est vrai ; la réciproque est **fausse** ($x \mapsto |x|$ en 0). Avant d'étudier la dérivabilité en a , vérifiez toujours d'abord la *continuité* en a : si f n'est pas continue en a , elle n'y est pas dérivable, inutile de calculer quoi que ce soit.

1. Le nombre dérivé comme outil de calcul de limites

Méthode — Reconnaître un taux d'accroissement

Devant une limite de la forme $\frac{0}{0}$ en un point a , demandez-vous : « Puis-je écrire cette expression comme $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$? » Si oui, la limite est $f'(a)$ et le calcul est terminé en une ligne.

Signe caractéristique : le dénominateur est $x - a$ (ou un multiple), et le numérateur s'annule en a .

Théorème — Règle du quotient des dérivées

Soient f et g dérivables en x_0 avec $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et $g'(x_0) \neq 0$. Alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Astuce

C'est une version élémentaire de la *règle de l'Hôpital*, dont vous verrez la forme générale en prépa. Retenez-la sous cette forme : elle transforme un calcul de limite pénible en deux dérivations immédiates.

Chapitre 9 — Formulaire et opérations

Boîte à outils — Dérivées usuelles et formes composées

$f(x)$	Domaine de f'	$f'(x)$	Forme composée
k	$\mathbb{R}$	0	$(ku)' = k u'$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$n x^{n-1}$	$(u^n)' = n u' u^{n-1}$
$x^n, n \in \mathbb{Z}_-$	$\mathbb{R}^*$	$n x^{n-1}$	$\left(\frac{1}{u^m}\right)' = \frac{-m u'}{u^{m+1}}$
$\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$a \cos(ax+b)$	$(\sin u)' = u' \cos u$
$\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$-a \sin(ax+b)$	$(\cos u)' = -u' \sin u$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$	$1 + \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = u'(1 + \tan^2 u)$

Propriété — Opérations

Soient u, v dérivables (avec v ne s'annulant pas là où c'est nécessaire) :

$$(u+v)' = u' + v', \quad (uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

Astuce — Le réflexe « $u = \frac{1}{v}$ »

Quand une fonction u est une fraction *compliquée*, il est souvent bien plus rapide de dériver $v = \frac{1}{u}$ (souvent très simple) puis d'utiliser $u' = -\frac{v'}{v^2}$. C'est exactement le but des trois exercices suivants.

Chapitre 10 — Dérivées successives et récurrence

Définition — Dérivée n -ième

On pose $f^{(0)} = f$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ (lorsque cela a un sens). On note aussi $f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$.

Méthode — Trouver puis prouver une formule pour $f^{(n)}$

1. **Calculer** f', f'', f''' sans simplifier trop tôt : il faut voir apparaître le motif $((-1)^n, n!,$ une puissance...).
2. **Conjecturer** la formule générale.
3. **Démontrer par récurrence** : initialisation à $n = 0$, puis on *dérive* l'hypothèse de récurrence.

Piège classique : initialiser à $n = 1$ alors que l'énoncé dit $\forall n \in \mathbb{N}$. On doit vérifier $n = 0$, c'est-à-dire $f^{(0)} = f$.

Astuce — Décomposition en éléments simples

Écrire une fraction rationnelle comme somme de termes $\frac{\alpha}{x-r}$ transforme un calcul impossible en une somme de calculs triviaux. C'est LA technique à retenir de cet exercice. Astuce de calcul rapide : pour trouver α , multipliez par $(x-1)$ puis faites $x = 1$: $\alpha = \left[\frac{x}{x+1}\right]_{x=1} = \frac{1}{2}$.

Idem pour β en $x = -1$.

Remarque

Les P_n sont, à normalisation près, les *polynômes de Tchebychev de seconde espèce* composés avec $\arctan$. Vous les recroiserez en prépa.

Remarque

Ce sont les **polynômes de Legendre**, définis par la *formule de Rodrigues*. Ils vérifient $P_n(1) = 1$ pour tout n — un excellent test de vérification : $P_2(1) = \frac{3-1}{2} = 1 \checkmark$, $P_3(1) = \frac{5-3}{2} = 1 \checkmark$.

Chapitre 11 — Applications de la dérivée

Théorème — Monotonie et signe de la dérivée

Soit f dérivable sur un **intervalle** I .

- f est croissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \geq 0$;
- f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \leq 0$;
- f est constante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) = 0$;
- si $f' > 0$ sur I (sauf éventuellement en des points *isolés*), alors f est **strictement** croissante sur I .

Piège à éviter

Le mot **intervalle** est essentiel. Sur $\mathbb{R}^*$ (qui n'est pas un intervalle), $f(x) = \frac{1}{x}$ vérifie $f' < 0$ partout, et pourtant f n'est *pas* décroissante sur $\mathbb{R}^*$: $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$ alors que $-1 < 1$. Écrivez toujours « décroissante sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ ».

Attention aussi : $f' > 0$ n'est *pas* équivalent à « f strictement croissante ». $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ bien que $f'(0) = 0$.

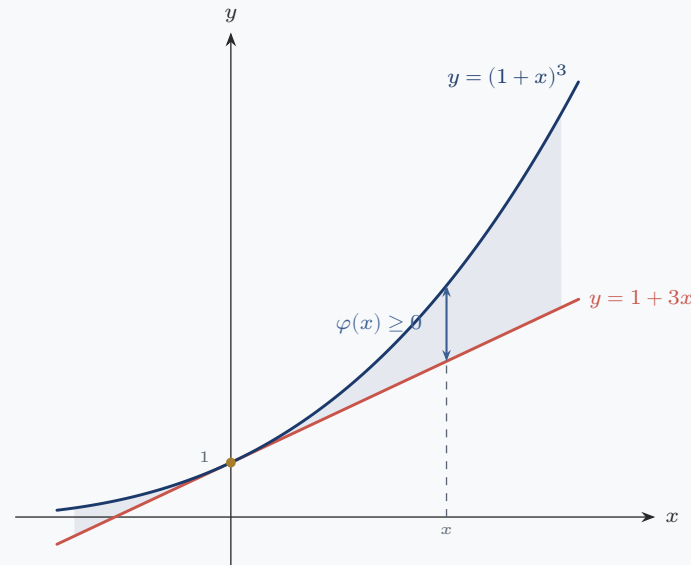
Méthode — Démontrer une inégalité par étude de fonction

Pour établir $A(x) \geq B(x)$ sur un intervalle I :

1. Poser $\varphi = A - B$ et déterminer φ' .
2. Étudier le **signe de φ'** (c'est là qu'est le travail ; au besoin, dériver une seconde fois).
3. Dresser le tableau de variations et **évaluer φ au bon bord** de l'intervalle.
4. Conclure : φ atteint son minimum en ce bord, et ce minimum est ≥ 0 .

Le point délicat : choisir la bonne variable. Dans une inégalité symétrique à plusieurs lettres, on fixe toutes les variables sauf une et l'on étudie la fonction de cette unique variable.

□ Démontrer une inégalité, c'est mesurer un écart vertical



Poser $\varphi = A - B$ revient à mesurer la flèche bleue. Ici $\varphi'(x) = 3(1+x)^2 - 3 \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$: φ croît depuis $\varphi(0) = 0$, l'écart ne peut donc que grandir. Géométriquement : **une courbe convexe reste au-dessus de sa tangente** — et l'inégalité de Bernoulli n'est rien d'autre que cela.

Astuce — L'homogénéité, l'arme secrète

Une inégalité *homogène* (invariante par $(a, b) \mapsto (\lambda a, \lambda b)$) se ramène toujours à **une seule variable** en normalisant, par exemple $a = 1$ ou $a + b = 1$. C'est le moyen le plus rapide de transformer un problème à plusieurs lettres en une étude de fonction ordinaire.

2. Premières équations différentielles

Méthode — Résoudre $g'' + \omega^2 g = \varphi(x)$ au niveau Terminale

1. On dispose d'une **solution particulière** f (fournie par l'énoncé).
2. On pose $h = g - f$: alors $h'' + \omega^2 h = 0$.
3. On **admet** (ou l'on démontre) que les solutions de $h'' + \omega^2 h = 0$ sont $h(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
4. Conclusion : $g = f + h$, soit $g(x) = f(x) + A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$.

Structure à retenir : *solution générale* = *solution particulière* + *solution générale de l'équation homogène*. C'est le schéma universel de toute la théorie des équations différentielles linéaires.

Astuce — Parité et estimations

$1 - \cos x$ est *paire* et vaut $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \dots$; $\tan x - x$ est *impair* et vaut $\frac{x^3}{3} + \dots$. Connaître ces deux ordres de grandeur permet de deviner instantanément le résultat de la plupart des exercices de dérivabilité en 0 — puis de le démontrer proprement par encadrement.