



Maths Elites

Excellence en Mathématiques | Terminale Sciences Mathématiques

Prof. R. Abed — Agrégé de Mathématiques

RÉVISION 1^{re} BAC SM • Cours

Partie I

Calcul algébrique

Cap sur la Terminale SM — Recueil de révision

Cours

Chapitre 1 — Coefficients binomiaux et binôme de Newton

À retenir

Pourquoi commencer par là? En Terminale SM, les factorisations $a^n - b^n$, le binôme de Newton et les sommes télescopiques interviennent *partout* : levée d'indéterminations, récurrences, suites, dénombrement, et plus tard nombres complexes et arithmétique. Un élève qui maîtrise ce chapitre gagne un temps considérable sur tout le reste de l'année.

1. Factorielles

Définition — Factorielle

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $n!$ (lire «factorielle n ») par :

$$0! = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = (n+1) \times n!.$$

De façon explicite : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^n k$.

Remarque

La convention $0! = 1$ n'est pas arbitraire : elle est la seule qui rende la relation $(n+1)! = (n+1)n!$ valable dès $n = 0$, et la seule qui donne $C_n^0 = 1$. Une bonne convention est une convention qui préserve les formules.

Astuce — Simplifier un quotient de factorielles

Ne développez **jamais** les factorielles. Écrivez plutôt :

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1) \times n!}{n!} = (n+2)(n+1).$$

Règle d'or : $\frac{n!}{(n-k)!}$ est un produit de k **facteurs consécutifs** descendant depuis n .

2. Arrangements et coefficients binomiaux

Définition — Arrangements, combinaisons

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On pose :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}.$$

Remarque

La notation C_n^k (lire « k parmi n ») est celle employée dans ce fascicule. Vous rencontrerez aussi la notation internationale $\binom{n}{k}$, de plus en plus répandue en classes préparatoires et dans la littérature : les deux désignent exactement le même nombre. Attention à l'ordre : dans C_n^k , n est l'effectif *total* (en bas) et k le nombre d'éléments choisis (en haut).

Propriété — Propriétés de base

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$;
2. $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$ (valable pour $n \geq 1$);
3. $C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$ (valable pour $n \geq 2$);
4. **Symétrie** : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, C_n^k = C_n^{n-k}$;
5. **Formule de Pascal** : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$;
6. **Formule du pion** : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

Méthode — Trois façons de prouver une identité binomiale

- (a) **Par le calcul** : on remplace chaque C_n^k par $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ et on met au même dénominateur. Infaillible, parfois long.
- (b) **Par dénombrement** : C_n^k est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments. Pascal se lit alors : « parmi les parties à $k+1$ éléments de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on sépare celles qui contiennent $n+1$ de celles qui ne le contiennent pas ». Élégant et instantané.
- (c) **Par identification de coefficients** : on développe $(1+x)^n$ de deux manières différentes. C'est la technique la plus puissante.

Piège à éviter

La formule de Pascal ajoute deux coefficients **consécutifs de même ligne** pour donner un coefficient de la ligne suivante. Ne l'écrivez jamais $C_n^k + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$ ni $C_n^k + C_{n+1}^k = \dots$. Récitez-la sous la forme mnémotechnique : « deux voisins d'une ligne du triangle donnent celui du dessous ».

3. La formule du binôme de Newton

Théorème — Binôme de Newton

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Remarque

Les deux écritures sont équivalentes : on passe de l'une à l'autre par le changement d'indice $j = n - k$, en utilisant la symétrie $C_n^k = C_n^{n-k}$. Le théorème est valable dès $n = 0$ (et pas seulement $n \geq 2$), à condition d'adopter la convention $0^0 = 1$ lorsque a ou b est nul.

Astuce — Le terme général, sans se tromper

Dans $(a+b)^n$, le terme d'indice k est $C_n^k a^{n-k} b^k$. **Contrôle systématique** : la somme des exposants doit toujours valoir n . Si vous écrivez $C_n^k a^{n-k} b^{k+1}$, l'erreur saute aux yeux.

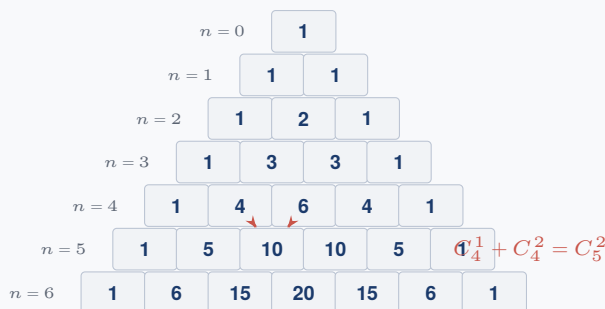
Piège à éviter

$(a - b)^n \neq \sum C_n^k a^{n-k} b^k$. Il faut écrire $a - b = a + (-b)$, d'où

$$(a - b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Le signe $(-1)^k$ porte sur k , pas sur $n - k$.

Triangle de Pascal



Chaque nombre est la somme des deux nombres situés au-dessus de lui : c'est exactement la formule de Pascal. La ligne n donne les coefficients de $(a + b)^n$.

Astuce — Vérifier un développement en 3 secondes

Substituez $a = b = 1$: la somme des coefficients doit valoir 2^n . Substituez $a = 1, b = -1$: la somme alternée doit valoir 0 (pour $n \geq 1$). Ces deux tests détectent la quasi-totalité des erreurs de calcul.

Théorème — Cas particulier fondamental

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors $(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$.

Astuce — Le réflexe « je dérive »

La question 4 se traite aussi en dérivant l'identité polynomiale $(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$:

$$n(1 + x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k C_n^k x^{k-1}, \quad \text{puis } x = 1.$$

Dériver puis évaluer est la technique reine pour faire apparaître un facteur k ; **intégrer puis évaluer** fait apparaître un facteur $\frac{1}{k+1}$. Gardez-la en mémoire, elle resservira toute l'année.

Chapitre 2 — Factorisations de référence et télescopage

4. La factorisation de $a^n - b^n$

Théorème — Deuxième identité remarquable généralisée

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Méthode — Démonstration par télescopage

Posons $u_k = a^k b^{n-k}$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-1-k}=\sum_{k=0}^{n-1}(a^{k+1}b^{n-1-k}-a^kb^{n-k})=\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)=u_n-u_0=a^n-b^n.$$

Principe du télescope : si un terme s'écrit $v_{k+1} - v_k$, la somme «se rétracte» et il ne reste que les extrémités : $\sum_{k=p}^q (v_{k+1} - v_k) = v_{q+1} - v_p$. C'est l'outil n°1 pour calculer une somme sans récurrence.

❑ **Le télescopage : tout s'annule, sauf les deux bouts**

chaque terme intérieur apparaît deux fois, avec des signes opposés

[illegible]

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_n$$

C'est tout le principe du télescopage. Dès que vous parvenez à écrire le terme général sous la forme $u_k - u_{k+1}$, la somme est calculée d'avance : seuls survivent le premier et le dernier terme.

Propriété — Cas particuliers à connaître par cœur

$$\bullet \frac{a^n - b^n}{a - b} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \quad (a \neq b)$$

$$\bullet 1 - x^n = (1 - x) \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

$$\bullet a^n + b^n = (a + b) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k \quad (n \text{ impair})$$

Piège à éviter

$a^n + b^n$ n'est factorisable par $a + b$ que si n est **impair**. Pour n pair, $a^n + b^n$ ne s'annule jamais (sauf $a = b = 0$) et n'admet donc aucune racine réelle : $a^2 + b^2$ est irréductible sur $\mathbb{R}$. *Test mental* : $a = 1$, $b = -1$ annule-t-il $a^n + b^n$?

À retenir

Cette identité est votre **premier développement limité**. Elle dit que $\frac{1}{1-x}$ vaut « $1 + x + \dots + x^{n-1}$ à un reste $\frac{x^n}{1-x}$ près ». En Terminale et surtout en prépa, ce type d'écriture « *partie principale* + *reste contrôlé* » est la clef de tous les calculs de limites fins. Retenez le mécanisme, pas seulement le résultat.

5. Les sommes classiques

Boîte à outils — Les trois sommes à connaître par cœur

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_1 = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad S_2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad S_3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = S_1^2.$$

Méthode — Démontrer S_2 par télescopage (sans récurrence)

On part de l'identité $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ et on somme pour k de 1 à n :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n [(k+1)^3 - k^3]}_{=(n+1)^3 - 1 \text{ (télescopage)}} = 3S_2 + 3S_1 + n.$$

D'où $3S_2 = (n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n$, et après simplification $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Le procédé se généralise : pour obtenir S_p , partez de $(k+1)^{p+1} - k^{p+1}$ et summez. C'est bien plus rapide qu'une récurrence, et surtout cela *trouve* la formule au lieu de la vérifier.

Astuce — La belle formule $S_3 = S_1^2$

$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$. Cette égalité surprenante se retient très bien et sert de test immédiat : pour $n = 3$, $1 + 8 + 27 = 36 = 6^2$. ✓

Astuce — Reconnaître une somme télescopique

Devant $\sum \frac{1}{k(k+1) \dots (k+p)}$, cherchez toujours à écrire le terme général comme une **différence de deux termes consécutifs** d'une même suite. Signe qui ne trompe pas : le dénominateur est un produit de facteurs *consécutifs*.