



MANUEL DE MÉTHODE

L'art de bien rédiger en mathématiques

Rigueur, clarté et méthode dans la démonstration

Au programme : les grands principes de la rédaction (introduire tout objet, articulations logiques, citer un théorème), **comment appliquer correctement les conditions d'un théorème** (TVI, existence-unicité, théorème de la bijection, prolongement par continuité), les pièges du langage des fonctions, et une check-list finale de la copie parfaite.

Adapté & enrichi pour la Terminale SM

Avant-propos : pourquoi rédiger vous rend meilleur

Vous êtes de bons, voire d'excellents élèves : vous trouvez les idées, vous voyez la solution. Mais en mathématiques, **trouver une idée et la démontrer sont deux choses différentes**. Une copie de haut niveau ne se reconnaît pas seulement aux résultats justes : elle se reconnaît à une rédaction où chaque objet est présenté, chaque hypothèse vérifiée, chaque implication justifiée.

Bien rédiger recouvre deux exigences :

1. **Exposer sa pensée clairement**, avec ordre et rigueur — et, si possible, avec style. Un raisonnement faux mais bien rédigé laisse voir son erreur ; un raisonnement juste mais mal rédigé ressemble à une arnaque, volontaire ou non.
2. **Respecter les conventions** de notation partagées par la communauté mathématique. On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels : personne ne songerait à le noter autrement. Fixer des notations communes, c'est ce qui rend les mathématiques *communicables*.

Dans tout ce manuel, les rédactions **correctes** sont signalées par ✓ et les rédactions **fautives** par ✗. Le ton est volontairement impératif ; sachez pourtant que la « bonne rédaction » comporte une part de convention — partagée toutefois par l'immense majorité des mathématiciens et de vos futurs correcteurs.

Table des matières

Avant-propos	1
1 Les grands principes de la rédaction	2
1.1 Principe 1 — Introduire tout ce dont on parle	2
1.1.1 Introduire une variable : « Soit... » / « Pour tout... »	2
1.1.2 Nommer un objet précis : « posons... » / « notons... »	3
1.2 Principe 2 — Mettre en évidence les articulations logiques	3
1.3 Principe 3 — « donc » n'est pas l'implication logique	4
1.4 Principe 4 — Annoncer ce que l'on fait	4
1.5 Principe 5 — Citer une définition ou un théorème avec exactitude	4
1.6 Principe 6 — La récurrence : jamais de « ... »	5
1.7 Principe 7 — Écrire français ou mathématique, pas les deux	5
2 Appliquer correctement les conditions d'un théorème	6
2.1 Étude de cas 1 — Le théorème des valeurs intermédiaires	6
2.2 Étude de cas 2 — De « au moins une » à « exactement une » solution	7
2.3 Étude de cas 3 — Le théorème de la bijection	7
2.4 Étude de cas 4 — Continuité en un point et prolongement	8
2.5 Trois pièges logiques autour des hypothèses	9
3 Le langage des fonctions : pièges classiques	10
3.1 La fonction f et la valeur $f(x)$: ce n'est pas la même chose	10
3.1.1 Définir une fonction : la barre-flèche contre la flèche simple	10
3.2 Parler des propriétés d'une fonction : « sur un intervalle », pas « pour tout x »	10
3.3 Dériver proprement	10
3.4 La naïveté des notations « toutes faites »	11
4 Mémo final : la check-list de la copie parfaite	12

1 Les grands principes de la rédaction

Cette première partie est, à bien des égards, la plus importante. Ne la négligez sous aucun prétexte : les fautes de rédaction les plus graves sont aussi des fautes de *logique*.

1.1 Principe 1 — Introduire tout ce dont on parle

★ RÈGLE D'OR

Toute notation, quelle qu'elle soit, doit être **introduite** avant d'être utilisée.

En français, dire « Ils ont travaillé toute la soirée » sans avoir dit qui sont « ils » rend la phrase incompréhensible. En mathématiques, c'est identique : un symbole qui « flotte en l'air » n'a aucun sens. La manière d'introduire un objet dépend de son **statut logique** : est-ce une *variable quelconque* d'un ensemble, ou un *objet précis* auquel on donne un nom ?

1.1.1 Introduire une variable : « Soit... » / « Pour tout... »

Pour parler d'un élément *quelconque* x d'un ensemble E , on écrit :

✓ **Bonne rédaction.** Soit $x \in E$. (ou, de façon équivalente :) Pour tout $x \in E$, ...

📖 ASTUCE

« Soit $x \in E$ » et « $\forall x \in E$ » sont **synonymes** : travailler avec un x *fixé mais quelconque* revient à travailler avec *tous* les x de E . En revanche, on n'écrit jamais « $\forall x \in E$ » à l'intérieur d'une phrase en français (voir le Principe 7 sur le mélange des genres).

Considérons la tâche : montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$.

✗ **Rédaction incorrecte.** On écrit directement $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \dots$ sans avoir introduit x . Le symbole x n'a pas de sens : de quel x parle-t-on ?

✓ **Bonne rédaction.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$.

! ATTENTION La phrase d'introduction n'est pas un détail

Oublier la petite phrase d'introduction est une **faute grave**, à la fois de rédaction *et* de logique. Beaucoup d'élèves produisent des raisonnements « qui n'ont ni queue ni tête » simplement parce qu'ils manipulent des symboles jamais introduits. Ils croient démontrer ; en réalité, ce qu'ils écrivent n'est ni vrai ni faux : cela n'a *aucun sens*.

📖 ASTUCE Le « Soit... » vainc la peur de la page blanche

Le « Soit... » n'est pas qu'une garantie de rigueur : c'est votre **point de départ**. Si l'on vous demande de démontrer un énoncé de la forme « Pour tout $x \in E$, si x vérifie P , alors Q », commencez *toujours*, même sans savoir poursuivre :

« Soit $x \in E$. On suppose que x vérifie P . Montrons que Q . »

Tant que vous ne vous êtes pas donné un objet fixé, vous n'avez aucune matière pour réfléchir. « De même qu'un peintre ne peut peindre sans peinture ni toile, un mathématicien ne peut réfléchir sans matériau pour sa réflexion. »

Exemple concret. Démontrer : « Toute fonction réelle croissante sur $\mathbb{R}$ admet une limite en $+\infty$. »
On traduit d'abord : pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si f est croissante, alors $\lim_{+\infty} f$ existe. La copie doit donc commencer par :

✓ **Bonne rédaction.** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose f croissante. Montrons que $\lim_{+\infty} f$ existe.

Vous avez le droit de ne pas savoir *finir* la preuve ; vous n'avez pas le droit de ne pas savoir la *commencer* ainsi.

1.1.2 Nommer un objet précis : « posons... » / « notons... »

Quand un objet est *déjà défini* et qu'on veut simplement lui donner un nom court (pour éviter de réécrire une expression compliquée, ou pour exhiber un exemple), on emploie les verbes **poser** ou **noter**.

✓ **Bonne rédaction.** On **pose** $K = \frac{\ln(n_0 + 1)}{n_0^2 + 1}$. ou On **note** K le réel $\frac{\ln(n_0 + 1)}{n_0^2 + 1}$.

Ces définitions appellent deux exigences :

1. La lettre K doit être **neuve**, non déjà utilisée. « Si vous vous appelez Sarah, vous n'appellerez pas votre enfant Sarah » : on évite toute confusion.
2. L'expression nommée doit être **parfaitement définie** au moment où on la nomme (ici, n_0 doit avoir été introduit auparavant).

! ATTENTION Le sens de l'égalité qui définit

Ce qu'on *définit* se place à **gauche** du signe $=$, ce qui est *connu* à droite. Supposons $y > 0$ déjà donné et cherchons à introduire un réel x tel que $x^2 = y$.

✗ **Rédaction incorrecte.** On pose $y = x^2$. (Cela laisse croire que c'est y qu'on définit, alors que y est déjà connu et que c'est x qu'il faut introduire.)

✓ **Bonne rédaction.** On pose $x = \sqrt{y}$. (ou $x = -\sqrt{y}$).

« Soit... » est lié au quantificateur **universel** $\forall$ (on prouve une propriété pour un objet quelconque). « Posons / Notons... » est lié au quantificateur **existantiel** $\exists$: pour montrer qu'un objet existe, il suffit d'en *exhiber* un.

Exemple d'existence. Montrer : $\exists x, y \in \mathbb{R}, x + y \in \mathbb{Z}$ tandis que $x \notin \mathbb{Z}$ et $y \notin \mathbb{Z}$. On ne peut pas commencer par « Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que... » : on doit *fabriquer* un exemple.

✓ **Bonne rédaction.** On pose $x = \frac{1}{2}$ et $y = -\frac{1}{2}$. Alors x et y ne sont pas entiers, pourtant $x + y = 0 \in \mathbb{Z}$.

1.2 Principe 2 — Mettre en évidence les articulations logiques

Un raisonnement doit *montrer* ses enchaînements. Distinguez clairement les hypothèses des conclusions, et indiquez les rapports entre propositions à l'aide de mots de liaison : *donc, alors,*

par conséquent, ainsi, or, de plus, en outre, puisque, comme, car...

📖 ASTUCE

«Truffez» vos raisonnements de ces petits mots — et **variez-les** : ils guident le lecteur et donnent du style. Une preuve sans mots de liaison est une liste d'affirmations, pas une démonstration.

Tâche : montrer que $\forall x \in [0, 1], \sqrt{1-x^2} \in [0, 1]$.

✗ **Rédaction incorrecte.** Une simple colonne d'inégalités empilées, sans un mot : $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq x^2 \leq 1$, $0 \leq 1-x^2 \leq 1$, $0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$.

✓ **Bonne rédaction.** Soit $x \in [0, 1]$. **Par** croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, on a $0 \leq x^2 \leq 1$, **ou encore** $0 \leq 1-x^2 \leq 1$. **Or** la fonction racine carrée est elle aussi croissante, **donc** $0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$. **Comme voulu**, $\sqrt{1-x^2} \in [0, 1]$.

1.3 Principe 3 — « donc » n'est pas l'implication logique

! ATTENTION

Dans un raisonnement, ne remplacez **jamais** le mot « donc » (ou « alors ») par le symbole d'implication $\Rightarrow$. Ce sont deux choses *logiquement différentes*.

Une proposition « $p \Rightarrow q$ » **n'affirme pas** que q est vraie, ni même que p l'est : elle affirme seulement que *si* p est vraie, *alors* q l'est. Ainsi, pour un $x \in [0, 1]$ fixé, écrire

✗ **Rédaction incorrecte.** $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1-x^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$

est incorrect : vous n'affirmez alors aucune de ces inégalités, seulement des liens entre elles. Le raisonnement correct a la forme :

« p est vraie » **donc** « q est vraie », sachant que « $p \Rightarrow q$ ».

Le « donc » exprime que, p étant vraie et $p \Rightarrow q$ étant vraie, on *déduit* q . Le symbole $\Rightarrow$, lui, se réserve à l'énoncé d'implications (théorèmes, équivalences), non au déroulé d'un calcul.

1.4 Principe 4 — Annoncer ce que l'on fait

Rédiger, c'est aussi **commenter** sa démarche. Annoncez le raisonnement que vous entamez : « Montrons que... », « Nous allons prouver que... », « Il ne reste plus qu'à établir que... », « Raisonnons par l'absurde », « Procédons par disjonction de cas ».

📖 ASTUCE

Ces annonces structurent la copie et *vous* structurent : elles transforment un tas d'idées en un plan. Le correcteur sait où vous allez ; vous aussi.

1.5 Principe 5 — Citer une définition ou un théorème avec exactitude

★ RÈGLE D'OR

Citer une définition ou un théorème exige une **précision absolue** : hypothèses, notations et conclusion, sans faute et sans oubli.

Un théorème «à peu près correct» est un théorème **mal appris** — et cela laisse au correcteur une impression très négative. Exemple : définir le nombre dérivé.

✗ Rédaction incorrecte. Le nombre dérivé de f en a est $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. (Qui sont f et a ? Pourquoi cette limite existe-t-elle ?)

✓ Bonne rédaction. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est *dérivable* en a si la limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est *finie*. On appelle alors *nombre dérivé* de f en a cette limite, notée $f'(a)$.

📖 ASTUCE

Connaître une définition ou un théorème, c'est être capable de l'écrire *ainsi*, proprement, **sans réfléchir un quart d'heure**. Entraînez-vous à réciter vos théorèmes « hypothèses puis conclusion » comme on récite un poème.

1.6 Principe 6 — La récurrence : jamais de « ... »

Il est tentant de remplacer une récurrence par trois petits points. À l'oral, cela *peut* passer ; à l'écrit, sur une copie sérieuse, **cela ne passe pas**. Illustration : montrer que si (u_n) est géométrique de raison q (c.-à-d. $\forall n, u_{n+1} = qu_n$), alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n u_0$.

✗ Rédaction incorrecte. $u_n = qu_{n-1} = q \cdot qu_{n-2} = \dots = q \times \dots \times q u_0 = q^n u_0$.

✓ Bonne rédaction. Initialisation. Comme $q^0 = 1$, on a $u_0 = q^0 u_0$.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $u_n = q^n u_0$. La suite étant géométrique, $u_{n+1} = qu_n$; or $u_n = q^n u_0$ par hypothèse, donc $u_{n+1} = q \cdot q^n u_0 = q^{n+1} u_0$, comme voulu.
Conclusion. Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n u_0$.

On comprend souvent *mieux* la preuve avec «...» ; seulement, la récurrence est **rigoureuse** et l'autre non. En mathématiques, la rigueur prime sur l'intuition lorsqu'il s'agit de *démontrer*.

1.7 Principe 7 — Écrire français *ou* mathématique, pas les deux

! ATTENTION

Ne mélangez pas une phrase française et un énoncé symbolique. Choisissez un registre.

✗ Rédaction incorrecte. $\forall m, n \in \mathbb{Z}$, la somme de m et n est un entier.

✓ Bonne rédaction. $\forall m, n \in \mathbb{Z}, m + n \in \mathbb{Z}$. ou La somme de deux entiers est un entier.

Le seul mélange toléré d'usage courant est le symbole $\in$, comme dans « Soit $x \in E$ » : inutile d'écrire « Soit x un élément de E ».

2 Appliquer correctement les conditions d'un théorème

C'est ici que se joue la différence entre un bon élève et un excellent. Un théorème n'est pas une formule magique que l'on invoque : c'est une implication

$$\begin{array}{ccc} \text{(hypothèses)} & \implies & \text{(conclusion)} \\ \boxed{\text{à vérifier}} & & \boxed{\text{ce qu'on obtient}} \end{array}$$

★ RÈGLE D'OR

On n'a le droit d'utiliser la conclusion d'un théorème qu'après avoir **vérifié explicitement chacune de ses hypothèses** sur l'objet de l'exercice.

MÉTHODE — Appliquer un théorème en quatre temps

1. **Annoncer** le théorème que l'on va utiliser (par son nom ou son énoncé).
2. **Vérifier une à une** toutes ses hypothèses sur l'objet étudié — sans en oublier, sans en inventer.
3. **Invoquer** le théorème (« d'après..., ses hypothèses étant réunies »).
4. **Écrire la conclusion** précise que le théorème fournit — ni plus, ni moins.

! ATTENTION La faute reine

La faute la plus fréquente et la plus lourdement sanctionnée consiste à **appliquer un théorème sans vérifier ses hypothèses**. « Par le TVI, l'équation admet une solution » ne vaut rien si vous n'avez pas dit *pourquoi* f est continue et *pourquoi* 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

2.1 Étude de cas 1 — Le théorème des valeurs intermédiaires

THÉORÈME 2.1 — Valeurs intermédiaires (TVI)

Soient $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est continue sur $[a, b]$, alors pour tout réel γ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \gamma$.

Deux hypothèses (souvent l'une est oubliée) : **(H1)** f continue sur le segment $[a, b]$; **(H2)** γ entre $f(a)$ et $f(b)$.

Exercice. Montrer que $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans $[1, 3]$.

✗ Rédaction incorrecte. « $f(1) = -1 < 0$ et $f(3) = 11 > 0$ donc par le TVI il y a une solution. » (On n'a jamais dit que f est continue : hypothèse H1 escamotée.)

✓ Bonne rédaction. Posons $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ pour $x \in [1, 3]$.

- **(H1)** f est une fonction polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur le segment $[1, 3]$.
- **(H2)** On calcule $f(1) = -1$ et $f(3) = 11$. Le réel 0 est compris entre $f(1)$ et $f(3)$ puisque $f(1) < 0 < f(3)$.

Les hypothèses du *théorème des valeurs intermédiaires* étant réunies, il existe $c \in [1, 3]$ tel que $f(c) = 0$. L'équation admet donc au moins une solution dans $[1, 3]$.

ASTUCE Le corollaire du changement de signe

Lorsque $\gamma = 0$, on utilise le corollaire : si f est continue sur $[a, b]$ et si $f(a) \cdot f(b) \leq 0$, alors f s'annule sur $[a, b]$. Vérifiez alors le **signe du produit** $f(a)f(b)$, c'est plus rapide que de parler de « γ entre $f(a)$ et $f(b)$ ».

! ATTENTION L'hypothèse «segment» est indispensable

Le TVI réclame un **intervalle fermé borné** $[a, b]$ et la **continuité**. Sur $]0, 1]$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ ne «traverse» pas toutes les valeurs entre ses bornes : retirer une hypothèse, c'est perdre la conclusion.

2.2 Étude de cas 2 — De «au moins une» à «exactement une» solution

Le TVI donne l'**existence**. Pour l'**unicité**, il faut une hypothèse supplémentaire : la *stricte monotonie*.

THÉORÈME 2.2 — Corollaire (existence et unicité)

Si f est continue et *strictement monotone* sur $[a, b]$, et si $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors il existe un **unique** $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

MÉTHODE — Rédiger une existence-unicité

1. **Existence** : continuité + changement de signe (TVI).
2. **Unicité** : stricte monotonie (souvent obtenue via le signe de f').
3. Conclure : «il existe un *unique* réel c tel que...».

Exercice. Montrer que $x^3 - 6x^2 + 6 = 0$ admet une *unique* solution dans $[-2, 0]$.

✓ **Bonne rédaction.** Posons $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$ sur $[-2, 0]$.

Continuité. f est polynomiale, donc continue sur $[-2, 0]$.

Changement de signe. $f(-2) = -8 - 24 + 6 = -26 < 0$ et $f(0) = 6 > 0$, donc $f(-2)f(0) < 0$.

Stricte monotonie. $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$. Sur $[-2, 0]$, $x \leq 0$ et $x-4 < 0$, donc $f'(x) \geq 0$, et f' ne s'annule qu'en 0 : f est *strictement croissante* sur $[-2, 0]$.

Les hypothèses du corollaire étant réunies, il existe un **unique** $c \in]-2, 0[$ tel que $f(c) = 0$.

! ATTENTION

«Strictement monotone» ne se *devine* pas : il faut le **prouver** (signe de la dérivée, ou tableau de variations). Écrire « f est croissante donc unique» sans justification, c'est utiliser une hypothèse non vérifiée.

2.3 Étude de cas 3 — Le théorème de la bijection**THÉORÈME 2.3 — Théorème de la bijection**

Soit f définie sur un intervalle I . Si (1) f est continue sur I et (2) f est strictement monotone sur I , alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.

MÉTHODE — Utiliser le théorème de la bijection

1. Préciser l'intervalle I de travail.
2. Vérifier (1) la continuité sur I (nature de f , opérations, composition).
3. Vérifier (2) la stricte monotonie (signe de f').
4. Conclure que f est une bijection de I sur $f(I)$, puis **déterminer** $f(I)$ à l'aide des limites/-valeurs aux bornes et du sens de variation.

Exercice. Soit $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ sur $I =]1, +\infty[$. Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.

✓ **Bonne rédaction.** (1) **Continuité.** f est une fonction rationnelle, définie sur $]1, +\infty[$ (le dénominateur $x-1$ ne s'y annule pas), donc continue sur I .

(2) **Stricte monotonie.** Pour $x \in I$, $f'(x) = \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$, donc f est strictement décroissante sur I .

D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$.

Détermination de J . f étant strictement décroissante et continue, $J =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f, \lim_{x \rightarrow 1^+} f[$. Or $\lim_{x \rightarrow 1^+} f = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 2$, donc $J =]2, +\infty[$.

ASTUCE Image d'un intervalle : lisez le tableau, pas votre intuition

Pour déterminer $f(I)$, appuyez-vous sur le **sens de variation** et les **limites aux bornes**. Une borne *ouverte* ou une limite *infinie* donne un crochet ouvert ; une borne *atteinte* donne un crochet fermé. Ne recopiez pas mécaniquement « $[f(a), f(b)]$ » sans vérifier le sens de variation : si f décroît, l'ordre s'inverse.

Sous les mêmes hypothèses, f^{-1} est continue sur $J = f(I)$, a le **même sens de variation** que f , et les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont **symétriques par rapport à la droite** $y = x$. Ce sont des conclusions du théorème : on peut les citer...à condition d'en avoir vérifié les hypothèses.

2.4 Étude de cas 4 — Continuité en un point et prolongement

Pour la continuité en un point a , la condition est : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Trois éléments à contrôler : la limite *existe*, elle est *finie*, et elle *vaut* $f(a)$.

Exercice. Soit $f(x) = \frac{x^2-4}{x^3-8}$ pour $x \neq 2$, et $f(2) = \alpha$. Déterminer α pour que f soit continue en 2.

✓ **Bonne rédaction.** Pour $x \neq 2$, on factorise : $\frac{x^2-4}{x^3-8} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{x+2}{x^2+2x+4}$ car $x-2 \neq 0$. La fonction $x \mapsto \frac{x+2}{x^2+2x+4}$ est continue en 2 (quotient de polynômes, dénominateur $12 \neq 0$), donc $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Ainsi f est continue en 2 si et seulement si $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, c'est-à-dire $\boxed{\alpha = \frac{1}{3}}$.

! ATTENTION Simplifier n'est licite que sous condition

On simplifie par $x - 2$ **parce que** $x \neq 2$: dites-le. Simplifier par une quantité sans avoir précisé qu'elle est non nulle est une faute — c'est appliquer «en douce» la règle $\frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a}{b}$ dont l'hypothèse est $k \neq 0$.

2.5 Trois pièges logiques autour des hypothèses

1. **L'hypothèse oubliée.** Chaque hypothèse compte. Le TVI sans continuité, la bijection sans monotonie, la simplification sans « $\neq 0$ » : autant de conclusions non garanties.
2. **Condition suffisante $\neq$ condition nécessaire.** Un théorème «si H alors C » ne dit rien quand H est faux. Si f n'est pas monotone, on ne peut pas conclure «donc f n'est pas bijective» : la réciproque n'est pas le théorème.
3. **La réciproque n'est pas donnée.** «Dérivable $\Rightarrow$ continue» est vrai ; «continue $\Rightarrow$ dérivable» est faux ($x \mapsto |x|$ en 0). N'utilisez que le sens effectivement démontré.

** ASTUCE**

Avant d'écrire «d'après le théorème...», relisez mentalement ses hypothèses et cochez-les une à une sur votre objet. Si une case reste vide, votre conclusion est **illégitime**, même si le résultat final se trouve être vrai.

3 Le langage des fonctions : pièges classiques

3.1 La fonction f et la valeur $f(x)$: ce n'est pas la même chose

! ATTENTION

f est une **fonction** ; $f(x)$ est un **nombre** (l'image de x), ou une **expression**. Une expression « $e^x \sin x$ » n'est pas une fonction.

✗ **Rédaction incorrecte.** La fonction $e^x \sin x$ est dérivable donc continue. ($e^x \sin x$ est une expression, pas une fonction.)

✓ **Bonne rédaction.** La fonction $x \mapsto e^x \sin x$ est dérivable donc continue.

3.1.1 Définir une fonction : la barre-flèche contre la flèche simple

! ATTENTION

Entre un élément et son image, on écrit $\mapsto$ (« barre-flèche »). Entre l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée, on écrit $\rightarrow$. Ne confondez pas : $x \mapsto e^x \sin x$ est correct ; $x \rightarrow e^x \sin x$ ne l'est pas.

✓ **Bonne rédaction.** Soit h la fonction $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $n \mapsto n^2$ ou On note h la fonction définie
 sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, h(n) = n^2$.

3.2 Parler des propriétés d'une fonction : « sur un intervalle », pas « pour tout x »

! ATTENTION

Une fonction est continue, dérivable, croissante **sur un intervalle** — et non « pour tout x ». Ces propriétés sont *globales*.

✗ **Rédaction incorrecte.** La fonction $x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}$ est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

✓ **Bonne rédaction.** La fonction $x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}$ est dérivable **sur** $\mathbb{R}$.

3.3 Dériver proprement

! ATTENTION

La notation $(f(x))'$ est **interdite** : on ne dérive pas un nombre. On dérive une *fonction* et on note $f'(x)$ le nombre dérivé en x . De même, $\sin'(2x)$ ne signifie pas « la dérivée de $x \mapsto \sin(2x)$ » !

Soit $f : x \mapsto e^{\sin(x^2)}$ à dériver sur $\mathbb{R}$.

✗ **Rédaction incorrecte.** $\forall x \in \mathbb{R}, (e^{\sin(x^2)})' = (\sin(x^2))' e^{\sin(x^2)} = 2x \cos(x^2) e^{\sin(x^2)}$.

✓ **Bonne rédaction.** Notons $g : x \mapsto \sin(x^2)$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $g'(x) = 2x \cos(x^2)$. Comme $f = \exp \circ g$, par composition : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g'(x) e^{g(x)} = 2x \cos(x^2) e^{\sin(x^2)}$.

Distinguez bien : dériver $x \mapsto \sin(2x)$ donne $x \mapsto 2 \cos(2x)$ (règle de la composée), tandis que $x \mapsto \sin'(2x)$ désigne $x \mapsto \cos(2x)$, car $\sin' = \cos$. Ce sont *deux fonctions différentes*.

3.4 La naïveté des notations « toutes faites »

Tous les professeurs notent $ax^2 + bx + c$ le trinôme et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant, *avec les mêmes lettres*. Lorsque vous devez résoudre *de votre propre initiative* une équation, ces lettres doivent être **introduites**, ou mieux, évitées.

✗ **Rédaction incorrecte.** Pour $x^2 + 3x - 2 = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = 17 > 0$ donc... (où sont définis a, b, c ?)

✓ **Bonne rédaction.** L'équation $x^2 + 3x - 2 = 0$ a pour discriminant $3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 17 > 0$. Elle possède donc deux solutions : $\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$ et $\frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$.

ASTUCE

La rédaction la plus **limpide** est souvent la plus **économique** : n'introduisez a, b, c, Δ que si vous les réutilisez. Et gardez pour vous vos moyens mnémotechniques (« $\Delta = b^2 - 4ac$ » suffit ; inutile d'exhiber la recette).

4 Mémo final : la check-list de la copie parfaite

AVANT DE RENDRE, VÉRIFIEZ

- ✓ Chaque symbole est-il **introduit** (« Soit... », « Posons... ») ?
- ✓ Ai-je commencé par **me donner l'objet** (« Soit $x \in E...$ ») ?
- ✓ Mes enchaînements portent-ils des **mots de liaison** (donc, or, car...) ?
- ✓ Ai-je évité de remplacer « donc » par $\implies$ dans un calcul ?
- ✓ Ai-je **annoncé** ce que je démontre (« Montrons que... ») ?
- ✓ Chaque théorème est-il cité avec **toutes ses hypothèses vérifiées** ?
- ✓ Mes récurrences sont-elles **complètes** (init. / hérédité / conclusion) ?
- ✓ Ai-je écrit $x \mapsto f(x)$ (et non $f(x)$ seul, ni $x \rightarrow f(x)$) ?
- ✓ Mes propriétés sont-elles énoncées **sur un intervalle** ?
- ✓ Ai-je noté $f'(x)$ (et jamais $(f(x))'$) ?

« Connaître un théorème, c'est savoir l'énoncer sans faute et savoir en vérifier les hypothèses avant de l'invoquer. »

Fin du manuel — Maths Elites

Prof. R. Abed — bonne rédaction, et bonnes démonstrations.