



Racines n -ièmes et Arctangente

Cours & Compléments

R. Abed — Professeur Agrégé de Mathématiques

■ Maths Elites ■ Terminale SM ■ Année scolaire 2026-2027

Fonctions réciproques — Bac SM → CPGE

Introduction — l'art d'inverser une fonction

Une fonction transforme une entrée en une sortie ; la *réciroque* fait le chemin inverse. Cette idée, d'apparence modeste, est l'une des plus fécondes de l'analyse : elle transforme la puissance $x \mapsto x^n$ en **racine n -ième**, la fonction $\tan$ en **arctangente**, et — hors de ce chapitre — l'exponentielle en logarithme. Nous construisons d'abord l'outil général avec toute la rigueur requise (théorème de la bijection, dérivation de la réciroque, symétrie des courbes), puis nous le déployons sur deux fonctions majeures :

- la **racine n -ième** $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, porte d'entrée vers les **puissances d'exposant réel** x^α et vers des inégalités fondamentales (Bernoulli, moyennes) ;
- l'**arctangente** $x \mapsto \arctan x$, dont les **relations d'addition** engendrent des identités spectaculaires et des sommes télescopiques dignes des concours.

Remarque — Éclairage historique

Les tables de racines carrées gravées sur les tablettes babyloniennes (YBC 7289, ~ 1800 av. J.-C.) donnent $\sqrt{2}$ avec six décimales exactes. Deux millénaires plus tard, l'arctangente devient l'arme du calcul de π : la **formule de Machin** (1706)

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

— une pure *identité entre arctangentes* — permet d'obtenir cent décimales de π à la main, et resta la méthode de référence jusqu'au XX^e siècle.

Boîte à outils — À la fin de ce chapitre, l'élève saura...

- démontrer qu'une fonction continue sur un intervalle est **injective si et seulement si** elle est strictement monotone, et en déduire une **bijection** ;
- établir avec rigueur la **symétrie** de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ par rapport à $y = x$, et la **dérivabilité** de la réciroque $((f^{-1})')$;
- manier racines n -ièmes et puissances réelles, et exploiter les inégalités de **Bernoulli** et **arithmético-géométrique** ;
- résoudre équations et inéquations irrationnelles, **dénester** des radicaux ;
- étudier l'**arctangente**, prouver ses relations d'addition et calculer des **sommes télescopiques** d'arctangentes.

Rappel de cours

Prérequis mobilisés en permanence : **continuité** et **théorème des valeurs intermédiaires** (T.V.I.), théorème des **bornes atteintes**, **dérivation** (opérations, composée, lien signe de f' / monotonie), et la fonction $\tan$ (dérivée $\tan' = 1 + \tan^2$, branches, période π). On note $\llbracket a, b \rrbracket$

un intervalle d'entiers.

Table des matières

Introduction — l'art d'inverser une fonction	1
I. Fonctions réciproques — théorie	2
Bijection et fonction réciproque	2
Injectivité et monotonie : le cœur de la théorie	2
Le théorème de la bijection	3
Symétrie des courbes par rapport à la première bissectrice	3
Dérivabilité de la réciproque	4
II. Racines n -ièmes et puissances réelles	5
Définition, existence, unicité	5
Règles de calcul	5
Dérivée, puissances rationnelles et réelles	5
Inégalités fondamentales	6
Équations, inéquations et dénestage de radicaux	7
III. La fonction arctangente	7
De la tangente à l'arctangente	7
Dérivée, variations, courbe	7
Relations d'addition	8
Compléments	9
Applications concrètes	9
Carte mentale du chapitre	9
Glossaire des notations	10
Auto-évaluation — « Je sais / Pas encore »	10
Pour aller plus loin (CPGE)	10

I. Fonctions réciproques — théorie

1. Bijection et fonction réciproque

Définition — Injection, surjection, bijection

Soit $f : E \rightarrow F$. On dit que f est :

- **injective** si $\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (deux entrées distinctes ont des images distinctes) ;
- **surjective** (sur F) si tout $y \in F$ a *au moins* un antécédent ;
- **bijective** si elle est injective *et* surjective, c.-à-d. si tout $y \in F$ a un **unique** antécédent : $\forall y \in F, \exists ! x \in E, f(x) = y$.

Définition — Fonction réciproque

Si $f : E \rightarrow F$ est bijective, sa **réciproque** $f^{-1} : F \rightarrow E$ envoie chaque y sur son unique antécédent :

$$y = f^{-1}(x) \iff x = f(y) \quad (x \in F, y \in E),$$

et $f^{-1} \circ f = \text{id}_E$, $f \circ f^{-1} = \text{id}_F$. La réciproque est **unique**, et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Piège à éviter — f^{-1} n'est pas $\frac{1}{f}$

f^{-1} désigne la **réciproque**, jamais l'inverse $\frac{1}{f}$. Pour $f(x) = x^3$: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ tandis que $\frac{1}{f(x)} = x^{-3}$. Deux objets sans rapport.

2. Injectivité et monotonie : le cœur de la théorie

Sur un intervalle, la continuité crée un lien remarquable entre une propriété *algébrique* (l'injectivité) et une propriété *d'ordre* (la monotonie).

Théorème — Continue et injective $\iff$ strictement monotone

Soit f continue sur un intervalle I . Alors :

$$f \text{ est injective sur } I \iff f \text{ est strictement monotone sur } I.$$

Démonstration. ($\Leftarrow$) Si f est strictement monotone, elle est clairement injective (deux antécédents distincts donnent des images distinctes), sans même utiliser la continuité.

($\Rightarrow$) Supposons f continue et injective, et montrons qu'elle est strictement monotone. Fixons $a < b$ dans I ; par injectivité $f(a) \neq f(b)$, disons $f(a) < f(b)$ (l'autre cas est analogue). Montrons qu'alors f est strictement croissante sur I tout entier. Raisonnons par l'absurde : s'il existait $u < v$ avec $f(u) \geq f(v)$, donc $f(u) > f(v)$ (injectivité), on aurait deux couples de «sens» opposés. Considérons la fonction continue sur $[0, 1]$

$$\varphi(t) = f((1-t)a + tu) - f((1-t)b + tv).$$

Elle vaut $\varphi(0) = f(a) - f(b) < 0$ et $\varphi(1) = f(u) - f(v) > 0$. Par le T.V.I., il existe t_0 tel que $\varphi(t_0) = 0$, c'est-à-dire $f(p) = f(q)$ avec $p = (1-t_0)a + t_0u$ et $q = (1-t_0)b + t_0v$. Or $a < b$ et $u < v$ entraînent $p < q$, donc $p \neq q$: cela contredit l'injectivité. Ainsi aucun tel couple (u, v) n'existe : f est strictement croissante sur I . ■

Attention — La continuité est indispensable

Sans continuité, l'équivalence tombe : $f(x) = x$ sur $[0, 1[$ et $f(x) = 3 - x$ sur $[1, 2]$ est injective mais non monotone. C'est bien la *continuité sur un intervalle* qui «force» la monotonie.

3. Le théorème de la bijection

Théorème — Bijection et réciproque continue

Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle I . Alors :

1. f réalise une **bijection** de I sur l'intervalle $J = f(I)$;
2. f^{-1} est **continue** sur J et **strictement monotone de même sens** que f ;
3. les bornes de J se lisent sur les limites/valeurs de f aux bornes de I .

Démonstration. Supposons f strictement croissante (sinon, remplacer f par $-f$). (1) f est injective (stricte monotonie); comme f est continue sur l'intervalle I , son image $J = f(I)$ est un *intervalle* (image continue d'un intervalle). Par construction $f : I \rightarrow J$ est surjective, donc bijective. (2) Pour $u, v \in J$, notons $x = f^{-1}(u)$, $y = f^{-1}(v)$; alors $u < v \iff f(x) < f(y) \iff x < y$ (croissance stricte), donc f^{-1} est strictement croissante. Une fonction *monotone* dont l'image $I = f^{-1}(J)$ est

un *intervalle* ne peut présenter de saut (un saut priverait l'image d'un intervalle), donc f^{-1} est **continu**. (3) La monotonie donne $J =]\lim_{I^-} f, \lim_{I^+} f[$ (avec les crochets adaptés selon que les bornes sont atteintes). ■

Méthode — Existence et unicité d'une solution de $f(x) = k$

1. Établir que f est **continu** et **strictement monotone** sur I (signe de f').
2. Calculer $J = f(I)$ via les limites/valeurs aux bornes.
3. Si $k \in J$: le théorème garantit **une unique** solution $\alpha = f^{-1}(k)$. Localiser α par **dichotomie** au besoin.

4. Symétrie des courbes par rapport à la première bissectrice

C'est le résultat graphique central du chapitre : nous en donnons une démonstration *complète*, à la fois analytique et géométrique.

Théorème — Symétrie $\mathcal{C}_f \leftrightarrow \mathcal{C}_{f^{-1}}$

Dans un repère **orthonormé** $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont **symétriques par rapport à la droite** $\Delta : y = x$ (première bissectrice) : $\mathcal{C}_{f^{-1}} = s_{\Delta}(\mathcal{C}_f)$, où s_{Δ} est la réflexion d'axe Δ .

Démonstration. Elle se fait en deux temps.

Étape 1 — correspondance des points. Soit $M(a, b)$ un point du plan.

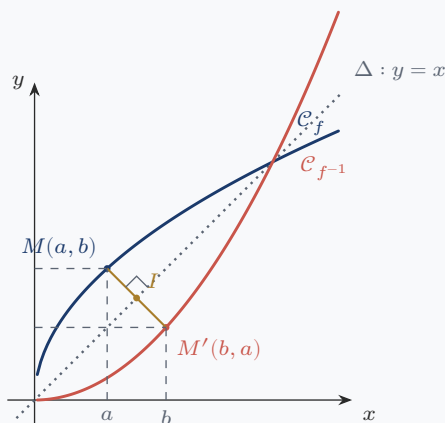
$$M(a, b) \in \mathcal{C}_f \iff b = f(a) \iff a = f^{-1}(b) \iff M'(b, a) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}.$$

Ainsi $M(a, b) \in \mathcal{C}_f \iff M'(b, a) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}$: les deux courbes se correspondent point par point via **l'échange des coordonnées** $(a, b) \mapsto (b, a)$.

Étape 2 — l'échange des coordonnées est la réflexion d'axe Δ . Il reste à prouver que, pour tout point $M(a, b)$, son échangé $M'(b, a)$ est bien le symétrique orthogonal de M par rapport à $\Delta : y = x$. Deux vérifications suffisent :

- Le milieu I de $[MM']$ appartient à Δ . En effet $I = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ a ses deux coordonnées égales, donc $I \in \Delta$.
- La droite (MM') est **perpendiculaire** à Δ . Le vecteur $\vec{MM'} = (b-a, a-b)$ est dirigé par $(1, -1)$, alors que Δ est dirigée par $\vec{u} = (1, 1)$. Leur produit scalaire vaut $1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0$: $\vec{MM'} \perp \vec{u}$.

Un point M' tel que le milieu de $[MM']$ soit sur Δ et $(MM') \perp \Delta$ est **exactement** le symétrique orthogonal de M par rapport à Δ . Donc $M' = s_{\Delta}(M)$. Combinée à l'étape 1, cette égalité donne $\mathcal{C}_{f^{-1}} = s_{\Delta}(\mathcal{C}_f)$. ■

□ Réflexion d'axe $y = x$: construction détaillée du point symétrique


Le milieu I de $[MM']$ est sur Δ et $(MM') \perp \Delta$: M' est donc le réfléchi de M . En faisant varier M sur $\mathcal{C}_f$, son réfléchi décrit $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.

Astuce — Conséquence immédiate

Les points de $\mathcal{C}_f \cap \Delta$ sont les points **fixes** de f (où $f(x) = x$) ; ils sont communs à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$. Pour tracer $\mathcal{C}_{f^{-1}}$, il suffit donc de «replier» $\mathcal{C}_f$ le long de Δ .

5. Dérivabilité de la réciproque

Théorème — Dérivée de la réciproque

Soit f continue strictement monotone sur I , bijective de I sur $J = f(I)$. Soit $b \in J$ et $a = f^{-1}(b)$. Si f est **dérivable** en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Si $f'(a) = 0$, $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ admet une **tangente verticale** au point (b, a) .

Démonstration. Posons $g = f^{-1}$, continue en b avec $g(b) = a$. Pour $y \in J$, $y \neq b$, posons $x = g(y)$; alors $y = f(x)$, et $x \neq a$ (car g injective). Le taux d'accroissement de g s'écrit

$$\frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)^{-1}.$$

Lorsque $y \rightarrow b$, la *continuité* de g assure $x = g(y) \rightarrow a$; par *dérivabilité* de f en a , le quotient interne tend vers $f'(a) \neq 0$. Par passage à l'inverse, $\lim_{y \rightarrow b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)}$, ce qui prouve la dérivabilité et la formule. Si $f'(a) = 0$, ce taux tend vers $\pm\infty$: tangente verticale. ■

Propriété — Pentes inverses — lecture graphique

En deux points symétriques $M(a, b) \in \mathcal{C}_f$ et $M'(b, a) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}$, les tangentes sont symétriques par rapport à Δ ; leurs pentes $f'(a)$ et $\frac{1}{f'(a)}$ sont **inverses**. Une tangente *horizontale* de $\mathcal{C}_f$ devient *verticale* pour $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.

II. Racines n -ièmes et puissances réelles

6. Définition, existence, unicité

Soit $n \geq 1$. La fonction $p_n : x \mapsto x^n$ est continue, dérivable, de dérivée $p'_n(x) = nx^{n-1} > 0$ pour $x > 0$: elle est **strictement croissante** sur $[0, +\infty[$, avec $p_n(0) = 0$ et $\lim_{+\infty} x^n = +\infty$. Par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

Définition — Racine n -ième

Pour $n \geq 1$ et $x \geq 0$, $\sqrt[n]{x}$ (aussi noté $x^{1/n}$) est l'**unique** réel positif de puissance n -ième égale à x :

$$y = \sqrt[n]{x} \iff (y \geq 0 \text{ et } y^n = x) \quad (x \geq 0).$$

C'est la réciproque de p_n sur $[0, +\infty[$. Pour $n = 2$, $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$.

Attention — Rôle de la parité de n

Pour n **impair**, p_n est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$: $\sqrt[n]{x}$ se définit pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$ (ex. $\sqrt[3]{-27} = -3$). Pour n **pair**, $x^n \geq 0$: $\sqrt[n]{x}$ n'existe que si $x \geq 0$, et $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ (et non x).

7. Règles de calcul

Propriété — Opérations

Pour $a, b \geq 0$, $n, m \geq 1$, $p \in \mathbb{Z}$ (avec $a > 0$ si besoin) :

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}, \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b > 0), \quad (\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}, \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}.$$

Démonstration. Chaque égalité repose sur l'**unicité** de la racine n -ième : deux réels positifs de même puissance n -ième sont égaux. Par exemple $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \geq 0$ et $(\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n (\sqrt[n]{b})^n = ab$, donc ce produit est $\sqrt[n]{ab}$. De même $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} \geq 0$ et sa puissance mn -ième vaut $((\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^m)^n = (\sqrt[n]{a})^n = a$, d'où $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$. ■

Piège à éviter — Trois erreurs à bannir

$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ (ex. $\sqrt[3]{9+16} = 5 \neq 7$) ; pour n pair $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ et non x ; enfin $\sqrt[n]{-a}$ n'a de sens réel que si n est impair.

8. Dérivée, puissances rationnelles et réelles

Théorème — Dérivée de la racine n -ième

$x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ est continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$, et

$$(x^{1/n})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}} \quad (x > 0),$$

avec une **tangente verticale** en 0 pour $n \geq 2$.

Démonstration. On applique la dérivation de la réciproque à $f = p_n$ sur $]0, +\infty[$, où $f'(x) = n x^{n-1} \neq 0$. Pour $x > 0$, avec $y = \sqrt[n]{x}$ ($y^n = x$) :

$$(x^{1/n})' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{n y^{n-1}} = \frac{1}{n (x^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

En 0^+ , cette dérivée tend vers $+\infty$: tangente verticale. ■

Définition — Puissances d'exposant rationnel puis réel

Pour $x > 0$, $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$: $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p$. Pour $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$: $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ (prolonge la définition rationnelle). Alors, pour $x, y > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}, \quad (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Propriété — Deux monotonies utiles

Pour $x > 1$ fixé, $\alpha \mapsto x^\alpha$ est strictement croissante. Pour $x > 0$ fixé, la suite $n \mapsto \sqrt[n]{x}$ tend vers 1 ($\sqrt[n]{x} = x^{1/n} = e^{(\ln x)/n} \rightarrow e^0 = 1$). En particulier, plus n grandit, plus $\sqrt[n]{x}$ se rapproche de 1.

9. Inégalités fondamentales

Théorème — Inégalité de Bernoulli

Pour $x \geq -1$ et $\alpha \geq 1$ (ou $\alpha \leq 0$) : $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$. Pour $0 \leq \alpha \leq 1$: $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$. L'égalité a lieu ssi $x = 0$ ou $\alpha \in \{0, 1\}$.

Démonstration. Fixons $\alpha \geq 1$ et posons $\varphi(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x$ sur $[-1, +\infty[$. Alors $\varphi'(x) = \alpha((1+x)^{\alpha-1} - 1)$. Comme $\alpha-1 \geq 0$, $(1+x)^{\alpha-1} \geq 1 \iff x \geq 0$: φ décroît sur $[-1, 0]$ puis croît sur $[0, +\infty[$, avec un minimum $\varphi(0) = 0$. Donc $\varphi \geq 0$. Les autres cas se traitent de même en suivant le signe de φ' . ■

Théorème — Inégalité arithmético-géométrique (AM–GM)

Pour des réels $a_1, \dots, a_n \geq 0$:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

avec égalité si et seulement si $a_1 = \cdots = a_n$.

Démonstration. (cas $n = 2$, fondateur.) Pour $a, b \geq 0$, $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ donne $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, soit $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, avec égalité ssi $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, i.e. $a = b$. Le cas général se démontre en CPGE (récurrence de Cauchy, ou convexité de $-\ln$) ; on l'admet ici. ■

Exemple — Comparer des radicaux

Quel est le plus grand de $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[5]{5}$? Poser $g(x) = \frac{\ln x}{x}$: $g'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, positive pour $x < e$, négative pour $x > e$. Donc $n \mapsto \sqrt[n]{n} = e^{g(n)}$ croît jusqu'à $n = 2-3$ puis décroît ; comme $g(3) > g(2)$, le maximum est $\sqrt[3]{3}$ (on vérifie $\sqrt[3]{3} \approx 1,442$ contre $\sqrt{2} \approx 1,414$).

10. Équations, inéquations et dénestage de radicaux

Méthode — Résoudre $\sqrt{A(x)} = B(x)$

1. Domaine : $A(x) \geq 0$. 2. Condition : $\sqrt{A} \geq 0 \Rightarrow B(x) \geq 0$.
 2. Sous ces conditions, élever au carré : $A(x) = B(x)^2$, résoudre.
 3. **Vérifier** chaque candidat (l'élévation au carré crée des racines parasites).
- Pour une *inéquation*, ne jamais élever au carré sans connaître le signe des deux membres.

Astuce — Dénester un radical double

Pour écrire $\sqrt{p + q\sqrt{d}} = \sqrt{u} + \sqrt{v}$, on identifie $u + v = p$ et $2\sqrt{uv} = q\sqrt{d}$, soit $uv = \frac{q^2 d}{4}$. Ainsi $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$ (car $u + v = 3$, $uv = 2$).

III. La fonction arctangente**11. De la tangente à l'arctangente**

Sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\tan$ est continue, de dérivée $1 + \tan^2 > 0$: strictement croissante, avec $\lim_{-\frac{\pi}{2}^+} \tan = -\infty$ et $\lim_{\frac{\pi}{2}^-} \tan = +\infty$. Elle réalise donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

Définition — Arctangente

$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est la réciproque de cette restriction :

$$y = \arctan x \iff \left(x = \tan y \text{ et } y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right).$$

Valeurs : $\arctan 0 = 0$, $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, $\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

Piège à éviter — Le retour dans l'intervalle principal

$\tan(\arctan x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, mais $\arctan(\tan y) = y$ seulement si $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi $\arctan(\tan \frac{2\pi}{3}) = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} \neq \frac{2\pi}{3}$.

12. Dérivée, variations, courbe**Théorème — Dérivée de l'arctangente**

$\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Elle est **impaire**, strictement croissante, avec $\lim_{-\infty} \arctan = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{+\infty} \arctan = +\frac{\pi}{2}$; $y = \pm \frac{\pi}{2}$ sont asymptotes horizontales et la tangente à l'origine est $y = x$.

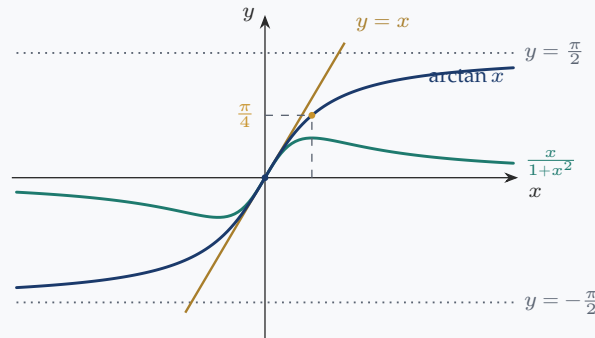
Démonstration. Avec $y = \arctan x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc $x = \tan y$ et $\tan'(y) = 1 + \tan^2 y \neq 0$, la dérivation de la réciproque donne $\arctan'(x) = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$. Positivité $\Rightarrow$ croissance stricte; $\tan$ impaire $\Rightarrow$ $\arctan$ impaire; enfin quand $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$ (bijection), d'où l'asymptote $\frac{\pi}{2}$, et $-\frac{\pi}{2}$ par imparité. ■

Théorème — Encadrement fondamental

Pour tout $x > 0$: $\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$. (Par imparité, inégalités renversées pour $x < 0$.)

Démonstration. Posons $h(x) = x - \arctan x$: $h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0$, et $h(0) = 0$, donc $h(x) > 0$ pour $x > 0$: $\arctan x < x$. Posons $k(x) = \arctan x - \frac{x}{1+x^2}$: $k'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0$, et $k(0) = 0$, donc $k(x) > 0$: $\frac{x}{1+x^2} < \arctan x$. ■

La courbe de l'arctangente et son encadrement



La courbe de $\arctan$ (bleu) est prise entre la droite $y = x$ (au-dessus, pour $x > 0$) et la courbe $\frac{x}{1+x^2}$ (au-dessous) : c'est l'encadrement démontré.

13. Relations d'addition

Propriété — Valeur et inverse

Pour $x \neq 0$: $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x)$, c'est-à-dire $+\frac{\pi}{2}$ si $x > 0$ et $-\frac{\pi}{2}$ si $x < 0$.

Démonstration. Sur $]0, +\infty[$, $g(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ vérifie $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+1/x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$: g est constante, et $g(1) = 2 \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$. Par imparité de $\arctan$, g est impaire, d'où $-\frac{\pi}{2}$ sur $] -\infty, 0[$. ■

Théorème — Formule d'addition

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $ab \neq 1$:

$$\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab} + \varepsilon\pi, \quad \varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{si } ab < 1, \\ +1 & \text{si } ab > 1, a > 0, \\ -1 & \text{si } ab > 1, a < 0. \end{cases}$$

Démonstration. Posons $S = \arctan a + \arctan b \in]-\pi, \pi[$. En utilisant $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ avec $\tan(\arctan a) = a$, $\tan(\arctan b) = b$:

$$\tan S = \frac{a+b}{1-ab}.$$

Si $ab < 1$, alors $S \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (chaque $\arctan y$ est, et la somme y reste car $1 - ab > 0$), donc $S = \arctan \frac{a+b}{1-ab}$. Si $ab > 1$ avec $a, b > 0$, alors $S \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$: $S = \pi + \arctan \frac{a+b}{1-ab}$ (l'argument est négatif). Le cas $a, b < 0$ est symétrique ($-\pi$). ■

Exemple — Trois identités à connaître

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} \quad (ab = \frac{1}{6} < 1, \frac{a+b}{1-ab} = 1); \quad \arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi.$$

Pour la seconde : $\arctan 2 + \arctan 3 = \pi + \arctan \frac{5}{1-6} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, puis $+\arctan 1 = \pi$.

Méthode — Sommes télescopiques d'arctangentes

Pour sommer $\sum \arctan \frac{c}{1+d_n d_{n+1}}$, on cherche à écrire chaque terme sous la forme $\arctan d_{n+1} - \arctan d_n$ grâce à la formule d'addition «à l'envers». La somme se télescope alors : $\sum_{n=0}^N (\arctan d_{n+1} - \arctan d_n) = \arctan d_{N+1} - \arctan d_0$.

Exemple — Le télescopage vedette

$$u_n = \arctan \frac{1}{n^2 + n + 1} = \arctan(n+1) - \arctan(n) \quad (\text{car } \frac{(n+1)-n}{1+n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n+1}). \text{ Donc } \sum_{n=0}^N u_n = \arctan(N+1) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}.$$

À retenir — Les réflexes du chapitre

- $y = f^{-1}(x) \iff x = f(y)$; $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_{f^{-1}}$ symétriques / $\Delta : y = x$. • $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ (pentes inverses). • $(x^{1/n})' = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$; $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ (n pair). • Bernoulli, AM-GM. • $\arctan' = \frac{1}{1+x^2}$; $\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$. • $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \pm \frac{\pi}{2}$; formule d'addition + télescopage.

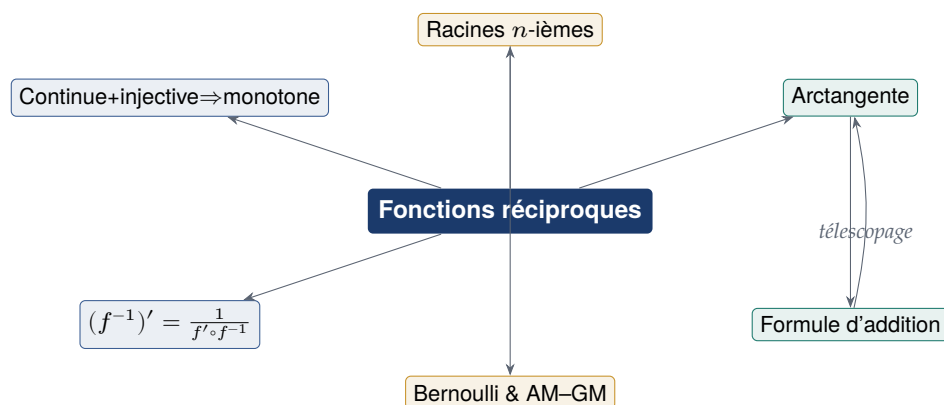
Compléments

14. Applications concrètes

Remarque — Où vivent ces fonctions ?

- **Géométrie / physique** : l'angle d'élévation d'un objet de hauteur h vu à distance d est $\arctan \frac{h}{d}$; l'argument d'un complexe $z = a + ib$ ($a > 0$) est $\arctan \frac{b}{a}$.
- **Informatique** : $\text{atan2}(y, x)$ généralise $\arctan \frac{y}{x}$ à tout le plan; l'algorithme **CORDIC** calcule $\arctan$ (et $\sin, \cos$) par additions et décalages — au cœur des calculatrices.
- **Moyennes** : l'inégalité AM-GM, issue des racines n -ièmes, régit l'optimisation (aire maximale à périmètre fixé, etc.).

15. Carte mentale du chapitre



16. Glossaire des notations

f^{-1}	réci-proque de f (pas $1/f$) ; $f^{-1} \circ f = \text{id}$
s_{Δ}	réflexion (symétrie orthogonale) d'axe $\Delta : y = x$
$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$	racine n -ième (n pair : $x \geq 0$; n impair : $x \in \mathbb{R}$)
x^{α}	$= e^{\alpha \ln x}$ pour $x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$
$\arctan x$	unique $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan y = x$
$\text{sgn}(x)$	signe de x (+1 si $x > 0$, -1 si $x < 0$)

17. Auto-évaluation — « Je sais / Pas encore »

Compétence

- Démontrer : continue + injective $\Rightarrow$ strictement monotone
- Démontrer la symétrie $\mathcal{C}_f / \mathcal{C}_{f^{-1}}$ (milieu $\in \Delta$, orthogonalité)
- Calculer $(f^{-1})'$ et interpréter les pentes inverses
- Utiliser Bernoulli / AM-GM ; comparer des radicaux $\sqrt[n]{n}$
- Résoudre / dénester des radicaux avec vérification
- Prouver l'encadrement de $\arctan$ et la formule d'addition
- Calculer une somme télescopique d'arctangentes

☐
☐
☐
☐
☐
☐
☐

18. Pour aller plus loin (CPGE)

Remarque — Horizon prépa

- $\arcsin, \arccos$ (réciproques de $\sin, \cos$ restreints) : $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, et $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.
- Le maximum de $x \mapsto x^{1/x}$ ($x > 0$) est atteint en $x = e$: c'est pourquoi $\sqrt[3]{3}$ l'emporte parmi les $\sqrt[n]{n}$ entiers.
- La série de **Leibniz** $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$ et la formule de **Machin** prolongent l'étude de $\arctan$ vers les développements en série.
- **Suites définies par radicaux** : $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ converge vers 2 (point fixe de $\varphi(x) = \sqrt{2+x}$) — un pont vers les suites récurrentes.