Maths Élites

2ème année Baccalauréat — Sciences Mathématiques • Année scolaire 2026 / 2027

CHAPITRE

Les fonctions logarithmes

Cours démontré · Terminale SM · Bac SM → CPGE

Auteur	Date	Chapitre	Niveau	Contenu
R. Abed — Agrégé de Math.	_____	Logarithmes	Bac SM → CPGE	Cours

Introduction : pourquoi le logarithme ?

Pour tout entier $n \neq -1$, la fonction $x \mapsto x^n$ possède la primitive $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Le cas $n = -1$ échappe à cette règle : la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, continue sur $]0, +\infty[$, admet bien des primitives (toute fonction continue sur un intervalle en possède), mais aucune n'est un polynôme ni une fraction rationnelle. Le chapitre construit cette primitive manquante, le *logarithme népérien*, puis en déduit toute une famille de fonctions qui transforment les produits en sommes.

Remarque — Un peu d'histoire

Au XVII^{e} siècle, les astronomes multiplient des nombres à dix chiffres à la main. John Napier (1614) puis Henry Briggs inventent des tables qui ramènent un produit à une addition, ce qui a fait gagner des années de calcul. Ce n'est qu'ensuite (Grégoire de Saint-Vincent, Mercator, 1668) que l'on reconnaît ces tables comme l'aire sous l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$ — c'est précisément la définition adoptée ici.

Boîte à outils — Objectifs

À la fin de ce chapitre, l'élève saura :

- définir ln comme primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ et démontrer ses propriétés algébriques ;
- étudier ln (variations, signe, limites, croissances comparées, concavité) et tracer sa courbe ;
- caractériser le nombre e et résoudre équations et inéquations logarithmiques en précisant le domaine ;
- dériver ln $|u|$ et déterminer les primitives de $\frac{u'}{u}$;
- utiliser le logarithme de base a et le logarithme décimal ;
- lever les formes indéterminées contenant un logarithme.

Rappel de cours

Dérivée d'une composée : $(f \circ u)' = u' \times f' \circ u$. Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives, deux primitives sur un intervalle diffèrent d'une constante. Si $f' = 0$ sur un intervalle, f y est constante. Une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle y réalise une bijection sur son image (théorème des valeurs intermédiaires). Pour $x > 0$ et $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $(q \geq 1)$, $x^r = \sqrt[q]{x^p}$.

© 2026 — Tous droits réservés

Table des matières

Introduction : pourquoi le logarithme ? . . . 1
1. Définition du logarithme népérien . . . 2
Une primitive qui s'annule en 1 . . . 2
2. Propriétés algébriques . . . 3
3. Étude de la fonction ln . . . 4
Variations et signe . . . 4
Limites en $+\infty$ et en 0^+ . . . 5
Limites en lien avec le nombre dérivé . . . 6
4. Bijection et nombre e . . . 6
Tableau de variations et courbe . . . 7
5. Dérivée et primitives logarithmiques . . . 8
6. Logarithme de base a . . . 9
Compléments . . . 10
Encart historique . . . 10
Applications . . . 10
Carte mentale du chapitre . . . 11
Glossaire des notations . . . 11
Auto-évaluation . . . 11
Pour aller plus loin (CPGE) . . . 12

1. Définition du logarithme népérien

1. Une primitive qui s'annule en 1

Théorème — Existence et unicité

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $I =]0, +\infty[$. Elle admet donc des primitives sur I, et il en existe *une seule* qui s'annule en 1.

Justification. L'existence résulte du théorème d'existence des primitives (admis, rappelé ci-dessus). Si F est une primitive, $F - F(1)$ s'annule en 1 et en est encore une ; si F_1 et F_2 s'annulent toutes deux en 1, leur différence a une dérivée nulle sur l'intervalle I, elle est constante, et cette constante vaut $F_1(1) - F_2(1) = 0$. ■

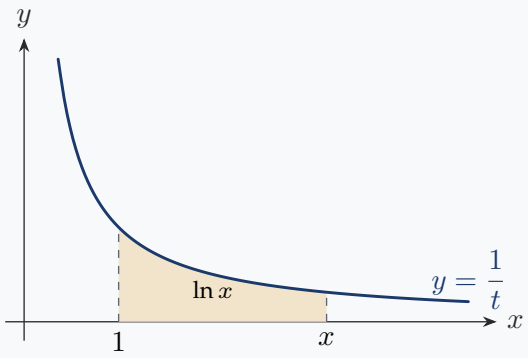
Définition — Logarithme népérien

On appelle **logarithme népérien**, noté ln, l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1. Ainsi :

$$\ln \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[, \qquad \forall x > 0,\ \ln'(x) = \frac{1}{x}, \qquad \ln(1) = 0.$$

© 2026 — Tous droits réservés

❑ **Interprétation géométrique : $\ln x$ est une aire**



Pour $x > 1$, $\ln x$ est l'aire (en unités d'aire) du domaine hachuré, situé sous l'hyperbole $y = \frac{1}{t}$ entre les abscisses 1 et x.

Remarque

On note aussi $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$ lorsqu'aucune ambiguïté n'est à craindre. Dans la littérature francophone ancienne, le logarithme népérien se note parfois Log ; le symbole log désigne en général le logarithme décimal (§ 6).

Piège à éviter

ln n'est définie que sur $]0, +\infty[$: avant tout calcul, *déterminer le domaine*. L'expression $\ln(x-3)$ n'existe que pour $x > 3$; $\ln(x^2)$ existe pour $x \neq 0$ alors que $2\ln x$ n'existe que pour $x > 0$.

2. Propriétés algébriques

Théorème — Relation fonctionnelle

Pour tous $x, y \in]0, +\infty[$: $\quad \ln(xy) = \ln x + \ln y$.

Démonstration. Fixons $y > 0$ et posons $g(x) = \ln(xy) - \ln x$ pour $x > 0$. La fonction g est dérivable (composée) et

$$g'(x) = y \cdot \frac{1}{xy} - \frac{1}{x} = 0.$$

Elle est donc constante sur $]0, +\infty[$, égale à $g(1) = \ln y - \ln 1 = \ln y$. Ainsi $\ln(xy) = \ln x + \ln y$. ■

Propriété — Conséquences

Pour tous $x, y > 0$, tout $n \in \mathbb{Z}$, tout $r \in \mathbb{Q}$ et tout entier $p \geq 1$:

1. $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$
2. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
3. $\ln(x^n) = n \ln x$
4. $\ln(\sqrt[p]{x}) = \frac{1}{p}\ln x$
5. $\ln(x^r) = r \ln x$
6. $\ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln x_k \quad (x_1, \dots, x_n > 0)$.

Démonstration.

1. $0 = \ln 1 = \ln\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \ln x + \ln \frac{1}{x}$, d'où $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$.
2. $\ln \frac{x}{y} = \ln\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = \ln x + \ln \frac{1}{y} = \ln x - \ln y$.
6. Par récurrence sur n : $\ln \prod_{k=1}^{n+1} x_k = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) + \ln x_{n+1}$.

© 2026 — Tous droits réservés

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on applique 6 avec $x_1 = \cdots = x_n = x$: $\ln(x^n) = n \ln x$; pour $n < 0$, $\ln(x^n) = \ln \frac{1}{x^{-n}} = -\ln(x^{-n}) = n \ln x$.
4. Avec $y = \sqrt[p]{x}$, on a $y^p = x$, donc $\ln x = p \ln y$.
5. Pour $r = \frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \geq 1$) et $y = x^r$: $y^q = x^p$, donc $q \ln y = p \ln x$, soit $\ln(x^r) = \frac{p}{q} \ln x$. ■

Exemple — Calculs avec $a = \ln 2$ et $b = \ln 3$

$$\ln 12 = \ln(2^2 \cdot 3) = 2a + b \ ; \quad \ln\left(\frac{\sqrt{18}}{8}\right) = \frac{1}{2}(a + 2b) - 3a = b - \frac{5}{2}a \ ; \quad \ln \frac{3}{4} = b - 2a.$$

Attention — Ne pas inventer de formules

$\ln(x+y) \neq \ln x + \ln y$ en général, et $\ln(x)\ln(y) \neq \ln(x+y)$. De même $(\ln x)^2 \neq \ln(x^2) = 2 \ln x$. Seul le *produit* devient somme.

Astuce

Pour écrire une somme de logarithmes comme un seul logarithme, on regroupe : $\ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln(x^2-1)$ *à condition que* $x > 1$. Les deux membres n'ont pas le même domaine ($x^2 - 1 > 0$ pour $|x| > 1$).

3. Étude de la fonction ln

2. Variations et signe

Théorème — Monotonie

ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Pour tous $x, y > 0$:

$$x < y \iff \ln x < \ln y \qquad \text{et} \qquad x = y \iff \ln x = \ln y.$$

De plus : $\ln x = 0 \iff x = 1$, $\ln x < 0 \iff 0 < x < 1$, $\ln x > 0 \iff x > 1$.

Démonstration. $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$: ln y est strictement croissante. Une fonction strictement croissante est injective et conserve l'ordre dans les deux sens, d'où les équivalences. Comme $\ln 1 = 0$, on a $\ln x < 0 = \ln 1 \iff x < 1$ et $\ln x > 0 \iff x > 1$. ■

Piège à éviter

Ne pas confondre $\ln x > 0 \iff x > 1$ avec $\ln x > 1 \iff x >$ e (le nombre e est défini au §4). Résoudre $\ln(f(x)) > 0$ revient à $f(x) > 1$, *pas* à $f(x) > 0$.

Méthode — Résoudre une (in)équation logarithmique

1. Déterminer le domaine : tous les arguments de ln doivent être > 0.
2. Se ramener à $\ln A(x) = \ln B(x)$ ou $\ln A(x) < \ln B(x)$.
3. Utiliser la monotonie : $A(x) = B(x)$, resp. $A(x) < B(x)$.
4. Intersecter avec le domaine. Pour une équation du second degré en $\ln x$, poser $t = \ln x$.

© 2026 — Tous droits réservés

3. Limites en $+\infty$ et en 0^+

Théorème — Limites aux bornes

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$

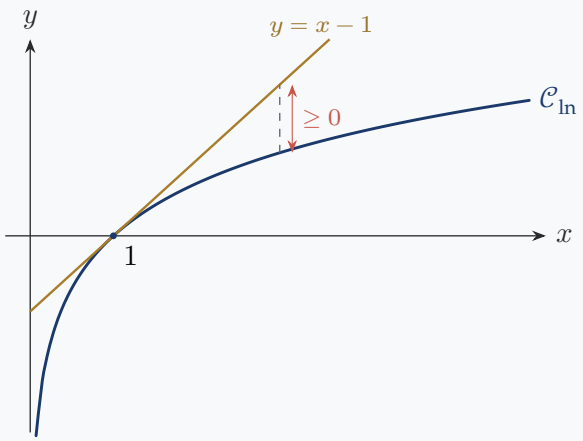
Démonstration. ln est croissante, donc admet une limite en $+\infty$ (finie ou $+\infty$). Comme $\ln(2^n) = n\ln 2$ avec $\ln 2 > 0$ (car $2 > 1$), la suite $\ln(2^n)$ tend vers $+\infty$; la limite de ln en $+\infty$ ne peut donc pas être finie : elle vaut $+\infty$. En 0^+, on pose $t = \frac{1}{x}$: $\ln x = -\ln t \to -\infty$ quand $t \to +\infty$. ■

Théorème — Majoration fondamentale

Pour tout $x > 0$: $\quad \ln x \leq x - 1$, avec égalité si et seulement si $x = 1$.

Démonstration. Posons $h(x) = x - 1 - \ln x$. Alors $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$: h est décroissante sur $]0, 1]$, croissante sur $[1, +\infty[$ et admet donc en 1 le minimum strict $h(1) = 0$. ■

❑ **La courbe de ln reste sous sa tangente en 1**



Pour tout $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$: la courbe est située sous la tangente au point d'abscisse 1, d'équation $y = x - 1$.

Théorème — Croissances comparées

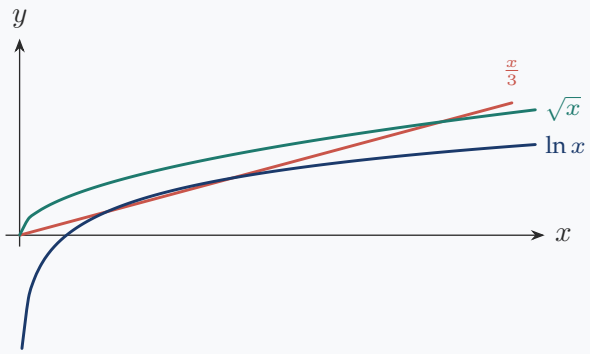
(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ $\qquad$ **(ii)** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0.$

(iii) Pour tout rationnel $r > 0$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$ $\quad$ et $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^r \ln x = 0.$

Démonstration. (i) Pour $x > 1$, $\ln x = 2\ln\sqrt{x} \leq 2(\sqrt{x} - 1) < 2\sqrt{x}$, donc $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}} \to 0$. (ii) Avec $t = \frac{1}{x}$: $x\ln x = -\frac{\ln t}{t} \to 0$ quand $t \to +\infty$. (iii) Soit $r = \frac{p}{q} > 0$; avec $u = x^r$ ($u \to +\infty$ quand $x \to +\infty$), $\ln x = \frac{1}{r}\ln u$ et $\frac{\ln x}{x^r} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\ln u}{u} \to 0$ d'après (i). Pour la seconde limite on remplace x par $\frac{1}{x}$. ■

© 2026 — Tous droits réservés

❑ **Croissances comparées :** $\ln x \ll \sqrt{x} \ll x$



À l'infini, $\ln$ croît « plus lentement que toute puissance » : $\ln x = o(x^r)$ pour tout $r > 0$ (la droite $y = \frac{x}{3}$ passe au-dessus de $\sqrt{x}$ dès que $x > 9$).

À retenir

Les trois « règles d'or » des limites avec logarithme : $\dfrac{\ln x}{x^r} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$; $x^r \ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$; en cas de forme indéterminée, *factoriser le terme dominant* (x^r l'emporte sur $\ln x$, et $\ln x$ l'emporte sur toute puissance de $\ln x$ de degré plus faible).

4. Limites en lien avec le nombre dérivé

Théorème — Limites usuelles

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Démonstration. Le premier quotient est le taux d'accroissement de $\ln$ en 1, qui tend vers $\ln'(1) = 1$. Pour le second, $x \mapsto \ln(1+x)$ a pour taux d'accroissement en 0 le quotient $\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x}$ et pour dérivée en 0 le nombre $\frac{1}{1+0} = 1$. ■

Exemple — Lever une forme indéterminée

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} x \ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$. Avec $t = \frac{3}{x} \to 0$: $x\ln(1+\frac{3}{x}) = 3 \cdot \frac{\ln(1+t)}{t} \to 3 \times 1 = 3$.

4. Bijection et nombre e

Théorème — $\ln$ est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$

La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$, de limites $-\infty$ en 0^+ et $+\infty$ en $+\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, tout réel y admet un unique antécédent. En particulier il existe un *unique* réel noté e tel que $\ln \mathrm{e} = 1$.

Définition — Le nombre e

e est l'unique réel tel que $\ln(\mathrm{e}) = 1$. On a $\mathrm{e} \approx 2{,}718\,281\,828$ et $2 < \mathrm{e} < 3$. Pour tout rationnel r, $\ln(\mathrm{e}^r) = r$.

© 2026 — Tous droits réservés

Remarque

La bijection réciproque de ln $:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ est la fonction exponentielle $x\mapsto \mathrm{e}^x$, étudiée au chapitre suivant. Les courbes de ln et de exp sont symétriques par rapport à la droite $y=x$.

Méthode — Résoudre $\ln x = m$

Pour tout réel m, l'équation $\ln x = m$ a *une unique* solution dans $]0,+\infty[$; on la reconnaît en écrivant $m=\ln(\cdot)$: par exemple $\ln x=-1 \iff x=\frac{1}{\mathrm{e}}$, $\ln x=\frac{1}{2}\iff x=\sqrt{\mathrm{e}}$, $\ln x=2\iff x=\mathrm{e}^2$.

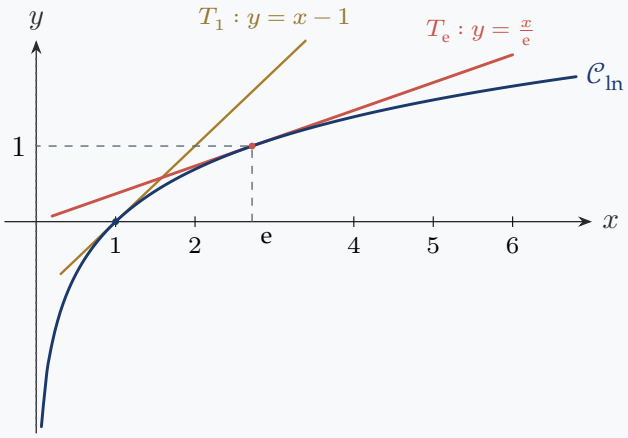
5. Tableau de variations et courbe

❑ **Tableau de variations de ln**

x	0		$+\infty$
$\ln'(x)=\frac{1}{x}$	‖	$+$	
$\ln x$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

$\ln'(x)=\frac{1}{x}>0$: ln *réalise une bijection strictement croissante de* $]0,+\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$; $\ln 1=0$ *et* $\ln \mathrm{e}=1$.

❑ **Représentation graphique de ln et ses tangentes**



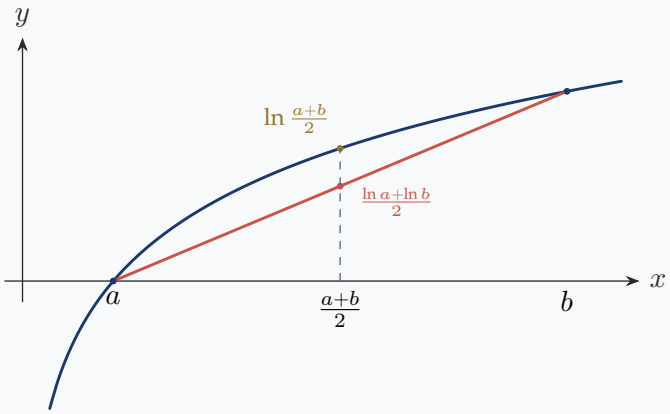
Courbe de ln : *l'axe des ordonnées est asymptote verticale, la courbe est concave (voir ci-dessous), passe par* $(1,0)$ *et par* $(\mathrm{e},1)$. *Tangente en* 1 : $y=x-1$; *tangente en* e : $y=\frac{x}{\mathrm{e}}$.

Propriété — Concavité

$\ln''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$: ln est **concave** sur $]0,+\infty[$. Sa courbe est au-dessous de chacune de ses tangentes et au-dessus de chacune de ses cordes.

© 2026 — Tous droits réservés

❑ **Concavité : la corde est sous la courbe**



Pour deux réels $a < b$ strictement positifs quelconques, le milieu de la corde est sous la courbe : $\frac{\ln a+\ln b}{2} \leq \ln \frac{a+b}{2}$.

5. Dérivée et primitives logarithmiques

Théorème — Dérivée logarithmique

Soient I un intervalle et u une fonction dérivable sur I qui *ne s'annule pas* sur I. Alors $x \mapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \qquad (\ln|u|)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Démonstration. Comme u est continue et ne s'annule pas sur l'intervalle I, elle garde un signe constant (T.V.I.). Si $u > 0$ sur I, $\ln|u| = \ln u$ et la dérivée d'une composée donne $\frac{u'}{u}$. Si $u < 0$, $\ln|u| = \ln(-u)$ et $(\ln(-u))' = \frac{-u'}{-u} = \frac{u'}{u}$. ■

Théorème — Primitives de $\frac{u'}{u}$

Sous les mêmes hypothèses, les primitives sur I de $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions $x \mapsto \ln|u(x)| + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Exemple — Primitives usuelles

- $\dfrac{x}{1+x^2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$: primitives $\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$.
- $\dfrac{1}{1-x}$ sur $]1, +\infty[$: $-\ln|1-x| + c = -\ln(x-1) + c$.
- $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = -\dfrac{(\cos x)'}{\cos x}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: primitives $-\ln(\cos x) + c$.
- $\dfrac{\ln x}{x(1+\ln^2 x)}$ sur $[\mathrm{e}, +\infty[$: avec $u = 1 + \ln^2 x$, $u' = \frac{2\ln x}{x}$, primitives $\frac{1}{2}\ln(1+\ln^2 x) + c$.

Méthode — Reconnaître $\frac{u'}{u}$

Repérer un quotient dont le numérateur est (à une constante multiplicative près) la dérivée du dénominateur ; au besoin, fabriquer u' au numérateur en ajustant par une constante ou en séparant la fraction en deux. Vérifier que u *ne s'annule pas* sur l'intervalle I imposé.

© 2026 — Tous droits réservés

Piège à éviter

La primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]-\infty,0[$ est $\ln|x|+c$, et *non* $\ln x$ (non défini). Sur $\mathbb{R}^*$, les primitives de $\frac{1}{x}$ sont $\ln|x|+c_1$ sur $]0,+\infty[$ et $\ln|x|+c_2$ sur $]-\infty,0[$ avec *deux constantes indépendantes*.

6. Logarithme de base a

Définition — Logarithme de base a

Soit $a>0$, $a\neq 1$. La fonction $\log_a : x\mapsto \dfrac{\ln x}{\ln a}$, définie sur $]0,+\infty[$, est le **logarithme de base a**. Cas particuliers : $\log_e = \ln$; $\log_{10}$ est le **logarithme décimal** (noté aussi log) ; $\log_2$ est utilisé en informatique.

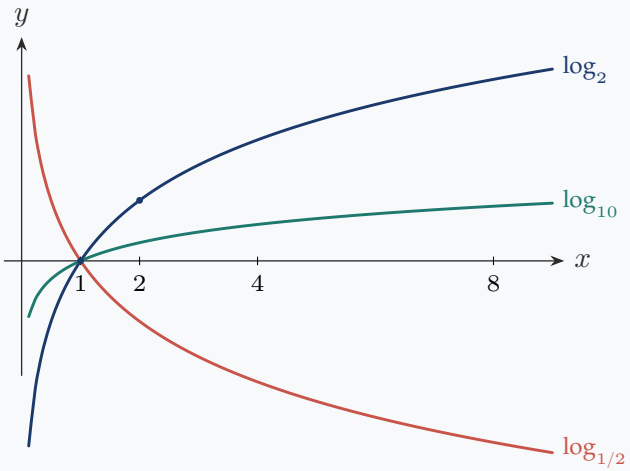
Propriété — Propriétés de $\log_a$

Pour $a\neq 1$ strictement positif, tous $x,y>0$ et $r\in\mathbb{Q}$:

1. $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$ et $\log_a(x^r)=r\log_a x$; $\log_a 1=0$; $\log_a a=1$.
2. (Changement de base) $\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ pour tout $b>0$, $b\neq 1$.
3. $\log_a(a^r)=r$ pour tout $r\in\mathbb{Q}$.
4. $\log_a$ est dérivable et $(\log_a)'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$.
5. Si $a>1$: $\log_a$ est strictement croissante, de limites $-\infty$ en 0^+ et $+\infty$ en $+\infty$. Si $0<a<1$: $\log_a$ est strictement décroissante, de limites $+\infty$ en 0^+ et $-\infty$ en $+\infty$.

Démonstration. 1, 3 et 4 découlent de celles de ln en divisant ou en dérivant par la constante $\ln a$. Pour 2 : $\frac{\log_b x}{\log_b a}=\frac{\ln x/\ln b}{\ln a/\ln b}=\frac{\ln x}{\ln a}$. Pour 5, le signe de $\ln a$ est positif si $a>1$ et négatif si $0<a<1$, et $(\log_a)'(x)=\frac{1}{x\ln a}$ a le signe de $\ln a$. ■

❑ **Logarithmes de bases 2, 10 et $\frac{1}{2}$**



Toutes les courbes passent par $(1,0)$; pour $a>1$, plus a est grand, plus la courbe est « aplatie ». Les courbes de $\log_a$ et $\log_{1/a}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

© 2026 — Tous droits réservés

Exemple — Applications du logarithme décimal

- Nombre de chiffres de $N \geq 1$: $\lfloor \log_{10} N \rfloor + 1$. Pour 2^{100} : $100 \log_{10} 2 \approx 30{,}103$, soit 31 chiffres.
- Résoudre $1{,}05^n = 2$: $n = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}05} \approx 14{,}2$ (temps de doublement à $5\,\%$ par an).
- Le pH d'une solution est $-\log_{10}[\mathrm{H}^+]$; l'échelle des décibels est logarithmique.

Astuce

Quand on résout une équation faisant intervenir des logarithmes de bases différentes, tout ramener à ln par $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$: on travaille alors avec une seule fonction.

À retenir

$\ln(xy) = \ln x + \ln y$; $\ln x \leq x - 1$; $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$; $\frac{\ln x}{x^r} \to 0$; $x^r \ln x \to 0^+$; $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. Avant tout : le **domaine** d'abord.

Compléments

6. Encart historique

Remarque — De Napier à Euler

1614 — John Napier publie ses tables de logarithmes, pour accélérer les calculs astronomiques. **1624** — Henry Briggs les adapte à la base 10 (logarithmes « briggsiens »). **1647–1668** — Grégoire de Saint-Vincent, puis Nicolaus Mercator, relient les logarithmes à l'aire sous l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$; le mot « népérien » rend hommage à Napier. **XVIII$^{\text{e}}$ siècle** — Leonhard Euler fixe la notation e et fait du logarithme la fonction réciproque de l'exponentielle.

7. Applications

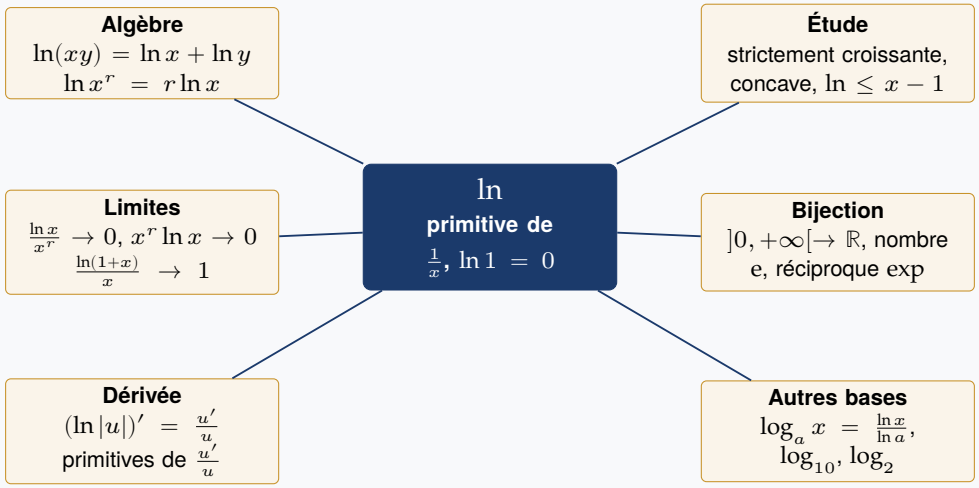
Exemple — Où rencontre-t-on le logarithme ?

- **Chimie** : $\mathrm{pH} = -\log_{10}[\mathrm{H}^+]$. Une solution dont la concentration en ions est 10^{-7} mol/L a un pH égal à 7.
- **Acoustique** : un niveau sonore en décibels vaut $10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$; multiplier l'intensité par 10 ajoute 10 dB.
- **Informatique** : une recherche dichotomique parmi N éléments demande environ $\log_2 N$ comparaisons ; $\lceil \log_2 N \rceil$ est le nombre de bits pour écrire N nombres.
- **Finance** : avec un taux annuel de $5\,\%$, le capital double au bout de $\frac{\ln 2}{\ln 1{,}05} \approx 14{,}2$ ans.
- **Arithmétique** : $N \geq 1$ a $\lfloor \log_{10} N \rfloor + 1$ chiffres ; 2^{100} en a 31.

© 2026 — Tous droits réservés

8. Carte mentale du chapitre

❑ Carte mentale : le logarithme népérien



Les six notions à relier : définition, algèbre, variations, limites, réciproque, dérivation.

9. Glossaire des notations

$\ln x$	logarithme népérien de $x > 0$; primitive de $\frac{1}{x}$ nulle en 1
e	unique réel vérifiant $\ln \mathrm{e} = 1$ ($\mathrm{e} \approx 2{,}718$)
$\log_a x$	logarithme de base a : $\frac{\ln x}{\ln a}$ ($a > 0$, $a \neq 1$)
$\log_{10}$, $\log_2$	logarithmes décimal et binaire
$\ln\lvert u\rvert$	dérivable, de dérivée $\frac{u'}{u}$, quand u ne s'annule pas
$\sqrt[n]{x}$	racine n-ième de $x > 0$, avec $\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \ln x$
$f \sim g$	équivalence en un point ; $\ln(1+h) \sim h$ en 0
$o(\cdot)$	négligeable ; $\ln x = o(x^r)$ en $+\infty$ pour $r > 0$

10. Auto-évaluation

Je sais…	Je sais	Pas encore
définir ln et démontrer $\ln(xy) = \ln x + \ln y$	☐	☐
résoudre une (in)équation logarithmique en précisant le domaine	☐	☐
étudier ln : variations, limites, concavité, courbe, tangentes	☐	☐
lever une forme indéterminée avec croissances comparées	☐	☐
calculer $(\ln\lvert u\rvert)'$ et les primitives de $\frac{u'}{u}$	☐	☐
utiliser $\log_a$ et le changement de base	☐	☐
démontrer $\ln x \leq x - 1$ et l'exploiter dans une inégalité	☐	☐

© 2026 — Tous droits réservés

11. Pour aller plus loin (CPGE)

Boîte à outils — Ouvertures

- **Intégrale et logarithme** : $\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$; la définition par l'aire fournit ln puis exp comme réciproque.
- **Convexité** : $-\ln$ est convexe, d'où l'inégalité de Jensen et l'inégalité arithmético-géométrique généralisée.
- **Séries** : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$ pour $|x| < 1$; la série harmonique diverge comme $\ln n$; constante d'Euler $\gamma = \lim(H_n - \ln n)$.
- **Analyse asymptotique** : formule de Stirling $\ln(n!) \sim n\ln n - n$; développements limités de $\ln(1+x)$.
- **Logarithme complexe** : en variable complexe, le logarithme est multivalué (chapitre sur les nombres complexes et les fonctions $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$).

© 2026 — Tous droits réservés