Fiche 1 : Domaine de définition et opérations

Fonction numérique, égalité, opérations, composée, image d'un intervalle

Prof : R. Abed

Fonction numérique

Une fonction f associe à chaque x d'une partie $D_f \subset \mathbb{R}$ un *unique* réel $f(x)$.

① $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) \text{ existe}\}$

② $\mathcal{C}_f = \{M(x\,; f(x)) \ : \ x \in D_f\}$

③ D_f = projection de $\mathcal{C}_f$ sur l'axe (Ox)

Égalité de deux fonctions

$f = g$ si : $\begin{cases} ① \ D_f = \mathcal{D}_g \\ ② \ \forall x \in D_f : f(x) = g(x) \end{cases}$

Piège : $\dfrac{x^2-1}{x-1} \neq x+1$: les domaines diffèrent ($\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $\mathbb{R}$).

Image directe

Pour $I \subset D_f$: $f(I) = \{f(x) \ : \ x \in I\}$.

$y \in f(I) \iff \exists x \in I,\ f(x) = y.$

① $f \nearrow$ sur $[a,b] \Rightarrow f([a,b]) \subset [f(a), f(b)]$

② $f \searrow$ sur $[a,b] \Rightarrow f([a,b]) \subset [f(b), f(a)]$

Attention : égalité seulement si f prend toutes les valeurs intermédiaires (f continue, admis). Sinon résoudre $f(x) = y$.

Opérations

$\mathcal{D}_{f+g} = \mathcal{D}_{fg} = D_f \cap \mathcal{D}_g$

$\mathcal{D}_{f/g} = \{x \in D_f \cap \mathcal{D}_g \ : \ g(x) \neq 0\}$

$\mathcal{D}_{\sqrt{f}} = \{x \in D_f \ : \ f(x) \geqslant 0\}$

$\mathcal{D}_{g\circ f} = \{x \in D_f \ : \ f(x) \in \mathcal{D}_g\}$

Déterminer un domaine de définition

⊙ Conditions d'existence (à résoudre *avant* toute simplification)

Écriture	Condition	Exemple
$\dfrac{1}{u(x)}$	$u(x) \neq 0$	$\dfrac{1}{x-3} : x \neq 3$
$\sqrt{u(x)}$	$u(x) \geqslant 0$	$\sqrt{4-x^2} : [-2,2]$
$\dfrac{1}{\sqrt{u(x)}}$	$u(x) > 0$	$\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} :]1,+\infty[$
$\tan u(x)$	$u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\tan 2x : x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$
$\dfrac{u}{v}$	$\mathcal{D}_u \cap \mathcal{D}_v,\ v \neq 0$	
$g \circ f$	$x \in D_f,\ f(x) \in \mathcal{D}_g$	$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

✧ **Méthode :** (1) lister toutes les conditions ; (2) résoudre chacune ; (3) *intersecter* les solutions ; (4) écrire D_f comme réunion d'intervalles.

Exemple : $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$

① $2x - x^2 = x(2-x) \geqslant 0 \iff x \in [0,2]$

② $x - 1 \neq 0 \iff x \neq 1$

$D_f = [0,2] \setminus \{1\} = [0,1[\cup]1,2].$

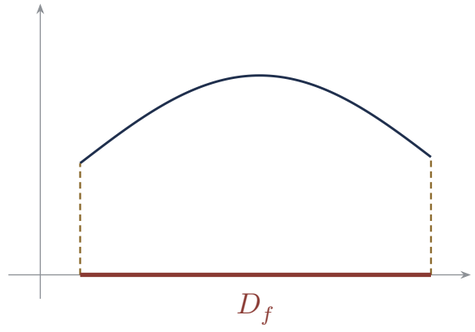
Composée et lecture graphique

⊙ $g \circ f$ existe en x si $x \in D_f$ et $f(x) \in \mathcal{D}_g$

① $f(I) \subset J \Rightarrow g \circ f$ est définie sur I.

② Si f est croissante sur I et g croissante sur $J \supset f(I)$: $g \circ f$ croissante.

③ Si f et g sont de monotonies contraires : $g \circ f$ décroissante.



⊙ Exemple : $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

$h(x) = \dfrac{x+1}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$ et $g = \sqrt{\cdot}$: $\dfrac{x+1}{x-1} \geqslant 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

$D_f =]-\infty,-1]\cup]1,+\infty[$ (réunion de deux intervalles).

✧ **Remarque :** le domaine d'une fonction est une *réunion d'intervalles* ; une monotonie ne s'étend à une réunion que si elle est démontrée sur cette réunion.

Fiche 2 : Parité et éléments de symétrie

Fonctions paires et impaires, axe de symétrie, centre de symétrie

Prof : R. Abed

Fonction paire

f est paire si :
$\begin{cases} ① \ \forall x \in D_f : -x \in D_f \\ ② \ \forall x \in D_f : f(-x) = f(x) \end{cases}$

$\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe (Oy).

Fonction impaire

f est impaire si :
$\begin{cases} ① \ \forall x \in D_f : -x \in D_f \\ ② \ \forall x \in D_f : f(-x) = -f(x) \end{cases}$

$\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine O.

Axe de symétrie

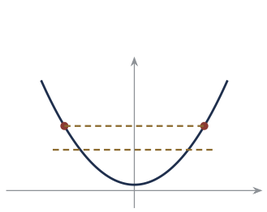
$(\Delta) : x = a$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$ si :
$\begin{cases} ① \ \forall x \in D_f : 2a - x \in D_f \\ ② \ \forall x \in D_f : f(2a - x) = f(x) \end{cases}$

Centre de symétrie

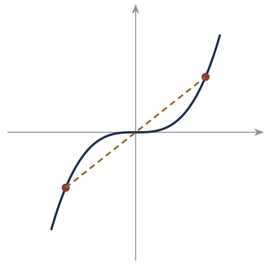
$I(a\,;b)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$ si :
$\begin{cases} ① \ \forall x \in D_f : 2a - x \in D_f \\ ② \ \forall x \in D_f : f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}$

Étudier la parité

⊙ Méthode : (1) D_f symétrique ? (2) calculer $f(-x)$ (3) comparer à $\pm f(x)$



paire



impaire

	g paire	g impaire
f paire	$f \times g$ paire	$f \times g$ impaire
f impaire	$f \times g$ impaire	$f \times g$ paire

① Somme de deux paires (impaires) : paire (impaire).
② f paire $\Rightarrow g \circ f$ paire ; f et g impaires $\Rightarrow g \circ f$ impaire.
③ f à la fois paire et impaire $\Rightarrow f = 0$ sur D_f.
④ Impaire en $0 \in D_f \Rightarrow f(0) = 0$.
⑤ Décomposition : $f = p + i$ avec $p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ paire et $i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ impaire.

Exemple : $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 1}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ symétrique ; $f(-x) = \dfrac{-3x}{x^2 - 1} = -f(x)$.

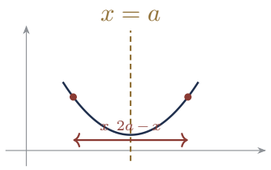
f est impaire.

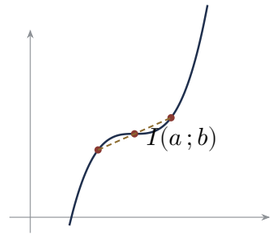
✧ **Pièges :** $\sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$: domaine non symétrique, ni paire ni impaire. $m(x) = x^3 - x^2 + 1$: $m(2) = 5$ et $m(-2) = -11$, ni paire ni impaire.

Axe et centre de symétrie : méthode du déplacement d'origine

⊙ $x = a$ axe $\iff t \mapsto f(a + t)$ paire

⊙ $I(a; b)$ centre $\iff t \mapsto f(a + t) - b$ impaire





Fonction	Élément	Vérification
$ax^2 + bx + c$	axe $x = -\frac{b}{2a}$	$f(2\alpha - x) = f(x)$
ax^3	centre O	impaire
$\dfrac{ax + b}{cx + d}$	centre $\left(-\frac{d}{c}\,;\frac{a}{c}\right)$	$f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$
$x^3 - 3x^2 + 2$	centre $(1\,;0)$	$f(2 - x) = -f(x)$
$\lvert x - 1\rvert + \lvert x - 3\rvert$	axe $x = 2$	$f(4 - x) = f(x)$

Exemple : $g(x) = \dfrac{3x - 1}{x + 2}$

$\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ est stable par $x \mapsto -4 - x$ et

$g(-4 - x) + g(x) = \dfrac{3x + 13}{x + 2} + \dfrac{3x - 1}{x + 2} = 6 = 2 \times 3.$

$\Omega(-2\,;3)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_g$.

✧ **Remarque :** la condition ① ($2a - x \in D_f$) fait partie de la définition ; la vérifier avant le calcul de $f(2a - x)$.

Fiche 3 : Fonctions bornées et extremums

Majorant, minorant, maximum, minimum, extremum d'un trinôme

Prof : R. Abed

Fonction majorée

f est majorée sur I si
$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I : f(x) \leqslant M$.

M est un *majorant* de f sur I ; tout réel $M' \geqslant M$ est aussi un majorant.

Fonction minorée

f est minorée sur I si
$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in I : f(x) \geqslant m$.

m est un *minorant* de f sur I.

Fonction bornée

f est bornée sur I si elle est majorée et minorée.

$\iff \exists K \geqslant 0,\ \forall x \in I : |f(x)| \leqslant K$.

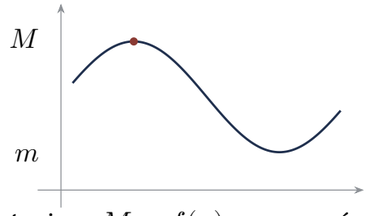
Maximum, minimum

f admet un *maximum* M en $x_0 \in I$ si $f(x_0) = M$ et $f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in I$.

Maximum = majorant *atteint*. Minimum : $f(x) \geqslant m = f(x_1)$.

Démontrer une borne

⊙ Pour prouver $f \leqslant M$: étudier le signe de $M - f(x)$



① Factoriser $M - f(x)$; un carré ou un quotient de signe constant donne le résultat.

② Le maximum est obtenu quand l'égalité est atteinte.

③ Un extremum peut être atteint en *plusieurs* points.

Exemple 1 : $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

$1 - f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1} \geqslant 0$ et $1 + f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1} \geqslant 0$.

$|f| \leqslant 1$; maximum $f(1) = 1$, minimum $f(-1) = -1$.

Exemple 2 : $f(x) = 3\cos x + 4$

$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Rightarrow 1 \leqslant f(x) \leqslant 7$.

maximum 7 en $x = 2k\pi$; minimum 1 en $x = \pi + 2k\pi$.

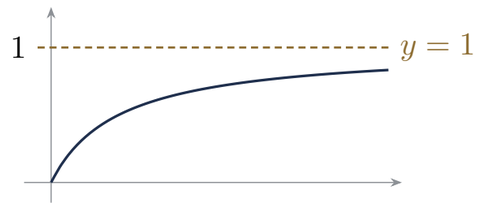
Extremum d'un trinôme et pièges

⊙ $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$

	$a > 0$	$a < 0$
Extremum	minimum $-\dfrac{\Delta}{4a}$ en $-\dfrac{b}{2a}$	maximum $-\dfrac{\Delta}{4a}$ en $-\dfrac{b}{2a}$
Borne	minorée, non majorée	majorée, non minorée

Exemple : $g(x) = 2x^2 - 4x - 1 = 2(x-1)^2 - 3$

minimum -3 en $x = 1$; g n'est pas majorée.



Majorant non atteint :

$g(x) = \dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1} < 1$ sur $[0, +\infty[$.

g est majorée par 1, *sans maximum*.

✧ **Pièges :** (1) majorant ≠ maximum. (2) f bornée sur $\mathbb{R}$ n'impose pas d'extremum : $h(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $0 < h \leqslant 1$, maximum 1, pas de minimum. (3) Le sens des inégalités s'inverse en multipliant par un réel négatif.

Fiche 4 : Monotonie

Taux d'accroissement, variations, opérations, composée, parité et monotonie

Prof : R. Abed

Fonction croissante

f est croissante sur I si :
$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
Strictement croissante : $f(x_1) < f(x_2)$.

Fonction décroissante

f est décroissante sur I si :
$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
Strictement décroissante : $f(x_1) > f(x_2)$.

Taux d'accroissement

Pour $x_1 \neq x_2$ dans I :

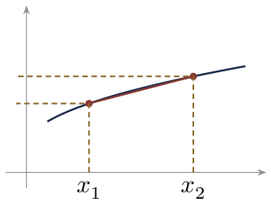
$$T_f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Caractérisation

① $T_f(x_1, x_2) \geqslant 0 \ \ (> 0) : f$ (strictement) croissante.
② $T_f(x_1, x_2) \leqslant 0 \ \ (< 0) : f$ (strictement) décroissante.
③ $T_f(x_1, x_2) = 0 : f$ constante.

Étudier la monotonie par le taux d'accroissement

⊙ Méthode : calculer $T_f(x_1, x_2)$, factoriser, étudier son signe



① $x_1 \neq x_2$ quelconques dans I.
② Simplifier le quotient (conjugué pour les racines).
③ Le signe de $T_f(x_1, x_2)$ ne doit dépendre que de I.

Fonction	Taux	Variations
$x^2 - 4x + 1$	$x_1 + x_2 - 4$	↘ sur $]-\infty, 2]$; ↗ sur $[2, +\infty[$
$\sqrt{2x+1}$	$\dfrac{2}{\sqrt{2x_1+1} + \sqrt{2x_2+1}}$	↗ sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$
$\dfrac{2x+3}{x+1}$	$\dfrac{-1}{(x_1+1)(x_2+1)}$	↘ sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$
$x + \dfrac{1}{x}$	$\dfrac{x_1 x_2 - 1}{x_1 x_2}$	↘ sur $]0, 1]$; ↗ sur $[1, +\infty[$

Exemple : $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

$$T_f(x_1, x_2) = \frac{2(1 - x_1 x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}.$$

$x_1 x_2 < 1$ sur $[-1, 1]$: f strictement croissante ; $x_1 x_2 > 1$ sur $[1, +\infty[$: strictement décroissante.

Opérations, composée, parité et pièges

Hypothèse sur I	Conclusion
f, g de même sens	$f + g$ de même sens
f, g croissantes et positives	$f \times g$ croissante
$f > 0$ croissante	$\frac{1}{f}$ décroissante
f de sens contraire de g, $f(I) \subset J$	$g \circ f$ décroissante
f et g de même sens, $f(I) \subset J$	$g \circ f$ croissante

⊙ Parité et monotonie

① f paire, croissante sur $[0, +\infty[\Rightarrow$ décroissante sur $]-\infty, 0]$.
② f impaire, décroissante sur $[0, +\infty[\Rightarrow$ décroissante sur $\mathbb{R}$ ($f(0) = 0$ raccorde les deux côtés).

Exemple : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

$D_f =]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$; $u(x) = x^2 - 2x - 3$ décroît sur $]-\infty, 1]$, croît sur $[1, +\infty[$; $\sqrt{\cdot}$ croît.

f décroît sur $]-\infty, -1]$ et croît sur $[3, +\infty[$.

✧ **Pièges :** (1) $h(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ décroît sur chaque intervalle mais $h(1) = -4 < h(3) = 10$: pas de monotonie sur la réunion. (2) Négation de « f monotone » : $\exists x < y,\ f(x) > f(y)$ *et* $\exists u < v,\ f(u) < f(v)$. (3) Différence, produit, quotient de croissantes : aucune conclusion générale.

Fiche 5 : Périodicité

Période, plus petite période, somme de fonctions périodiques, parité et période

Prof : R. Abed

Fonction périodique

f est périodique de période $T > 0$ si :

$$\begin{cases} ① \ \forall x \in D_f : x + T \in D_f \\ ② \ \forall x \in D_f : f(x+T) = f(x) \end{cases}$$

Conséquences

① $f(x + kT) = f(x)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

② kT est une période pour $k \in \mathbb{N}^*$.

③ $\mathcal{C}_f$ est invariante par la translation de vecteur $T\vec{\imath}$.

Réduction du domaine

① Étudier f sur un intervalle d'amplitude T : $[0, T]$ ou $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.

② Prolonger la courbe par translations de $kT\vec{\imath}$.

Parité et période

① f paire et T-périodique : axes $x = k\frac{T}{2}$.

② f impaire et T-périodique : $f\left(\frac{T}{2}\right) = 0$, centres $\left(k\frac{T}{2}\,;0\right)$.

Déterminer une période

⊙ Périodes usuelles

Fonction	Période
$\sin(ax+b),\ \cos(ax+b)$	$\dfrac{2\pi}{\lvert a\rvert}$
$\tan(ax+b)$	$\dfrac{\pi}{\lvert a\rvert}$
$x - E(x)$	1
$f(ax+b)$ avec f T-périodique	$\dfrac{T}{\lvert a\rvert}$

⊙ Somme ou produit de deux fonctions périodiques

Périodes T_1 et T_2 avec $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$: $T = qT_1 = pT_2$ est une période commune.

Exemple : $f(x) = \sin(4x + \frac{\pi}{3}) + \cos(6x - \frac{\pi}{4})$

Périodes $\dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{\pi/2}{\pi/3} = \dfrac{3}{2}$.

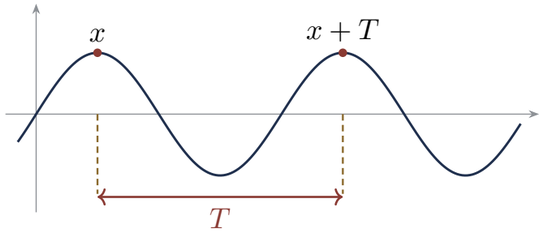
$T = 2 \cdot \dfrac{\pi}{2} = 3 \cdot \dfrac{\pi}{3} = \pi$ est une période de f.

Exemple : $f(x) = E(2x) - 2x + 3$

$E(2x+1) = E(2x) + 1$ et $2\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2x + 1$ donc $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(x)$.

$\frac{1}{2}$ est une période de f.

Piège : rapport irrationnel



La courbe se reproduit identiquement à chaque translation de vecteur $T\vec{\imath}$.

⊙ $f(x) = \cos x + \cos(\sqrt{2}\,x)$ n'est pas périodique

Si $T > 0$ était une période : $f(T) = f(0) = 2$ impose $\cos T = \cos(\sqrt{2}\,T) = 1$.

Donc $T = 2k\pi$ et $\sqrt{2}\,T = 2m\pi$ avec $k, m \in \mathbb{N}^*$, d'où $\sqrt{2} = \dfrac{m}{k} \in \mathbb{Q}$.

Contradiction : f n'est pas périodique.

⊙ Prolonger une fonction périodique

f paire, 2-périodique, $f(x) = 1 - x$ sur $[0, 1]$:

$f(3) = f(1) = 0$; $f\left(\frac{5}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$; $f(-2) = f(0) = 1$.

f impaire, 2-périodique, $f(x) = 2x(1 - x)$ sur $[0, 1]$:

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$; $f\left(-\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$; $f(-1) = -f(1) = 0$.

✧ **Pièges :** (1) $\sin x + \sin(\pi x)$: rapport π irrationnel, non périodique. (2) La somme de deux fonctions T_1 et T_2-périodiques peut avoir une période plus petite que qT_1 ; vérifier. (3) Le plus petit $T > 0$ peut ne pas exister : une fonction constante admet toute période.

Fiche 6 : Fonctions usuelles

Trinôme, ax^3, racine, inverse, homographique, transformations de courbes

Prof : R. Abed

Trinôme ax^2+bx+c

$= a(x-\alpha)^2+\beta$,
$\alpha = -\frac{b}{2a}$.
Axe $x=\alpha$, sommet $S(\alpha\,;\beta)$.
$T = a(x_1+x_2-2\alpha)$.



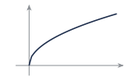
Fonction $x \mapsto ax^3$

Impaire, centre O.
$T = a(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$: strictement monotone, de sens celui de a.



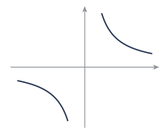
Fonction $x \mapsto \sqrt{x+a}$

$D_f = [-a,+\infty[$.
$T = \dfrac{1}{\sqrt{x_1+a}+\sqrt{x_2+a}} > 0$: strictement croissante.



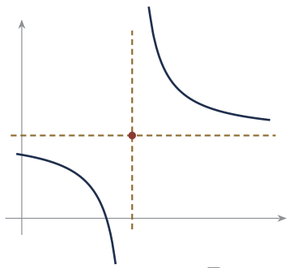
Fonction $x \mapsto 1/x$

Impaire, $D_f = \mathbb{R}^*$.
$T = -\dfrac{1}{x_1x_2} < 0$: strictement décroissante sur chaque intervalle.



Fonction homographique $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

⊙ $c \neq 0,\ D = ad-bc \neq 0,\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{-\frac{d}{c}\}$



① $T_f(x_1,x_2) = \dfrac{D}{(cx_1+d)(cx_2+d)}$.

② $D > 0$: strictement croissante sur chaque intervalle ; $D<0$: strictement décroissante.

③ Centre de symétrie $\Omega\left(-\frac{d}{c}\,;\frac{a}{c}\right)$.

④ Asymptotes $x=-\frac{d}{c}$ et $y=\frac{a}{c}$.

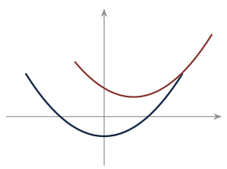
Exemple : $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$

$D = 3\times(-2)-1\times 1 = -7<0$; $\Omega(2\,;3)$.

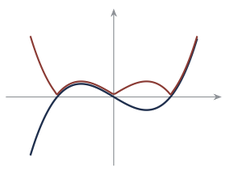
f strictement décroissante sur $]-\infty,2[$ et sur $]2,+\infty[$.

Transformations de courbes

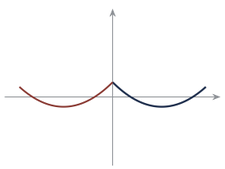
Fonction	Courbe obtenue à partir de $\mathcal{C}_f$
$f(x)+b$	translation de vecteur $b\,\vec{j}$
$f(x+a)$	translation de vecteur $-a\,\vec{\imath}$
$-f(x)$	symétrie par rapport à (Ox)
$f(-x)$	symétrie par rapport à (Oy)
$\lvert f(x)\rvert$	arcs où $f \geqslant 0$ conservés ; arcs où $f<0$ symétrisés par rapport à (Ox)
$f(\lvert x\rvert)$	partie $x \geqslant 0$ conservée, complétée par symétrie par rapport à (Oy)



$f(x+a)+b$



$|f(x)|$



$f(|x|)$

✧ **À retenir :** $f(|x|)$ est paire, quelle que soit f ; $|f|$ est positive. Pour discuter le nombre de solutions de $f(|x|)=m$, lire les solutions de $f(x)=m$ sur $x\geqslant 0$ puis doubler (sauf $x=0$).

Forme réduite : $\dfrac{2x-3}{x-2} = 2+\dfrac{1}{x-2}$

Mise en évidence de $\Omega(2\,;2)$ et de la monotonie ($D = 2\times(-2)-(-3)\times 1 = -1<0$).

Fiche 7 : Étude des fonctions

Symétries, périodicité, concavité et convexité, tangentes, branches infinies

Prof : R. Abed

Axe de symétrie

$(\Delta) : x = a$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

si : $\begin{cases} ① \ \forall x \in D_f \Rightarrow 2a - x \in D_f \\ ② \ \forall x \in D_f \Rightarrow f(2a-x) = f(x) \end{cases}$

Centre de symétrie

$I(a\,;b)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

si : $\begin{cases} ① \ \forall x \in D_f \Rightarrow 2a - x \in D_f \\ ② \ \forall x \in D_f : f(2a-x) + f(x) = 2b \end{cases}$

Fonction périodique

f est périodique de période T.

si : $\begin{cases} ① \ \forall x \in D_f : x + T \in D_f \\ ② \ \forall x \in D_f : f(x+T) = f(x) \end{cases}$

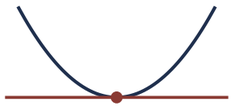
Concavité et convexité

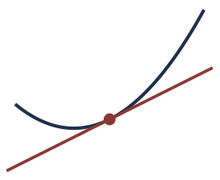
① si $\forall x \in I : f''(x) \geqslant 0 \Rightarrow \mathcal{C}_f$ est convexe sur I.
② si $\forall x \in I : f''(x) \leqslant 0 \Rightarrow \mathcal{C}_f$ est concave sur I.
③ si f'' s'annule en a et change de signe $\Rightarrow$ $A(a\,;f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Les tangentes

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

0	$m \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$
Tangente horizontale	**Tangente oblique** (le coefficient directeur $a = m$)	





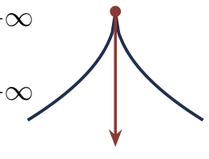
① $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$

dirigée vers le haut



② $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$

dirigée vers le bas

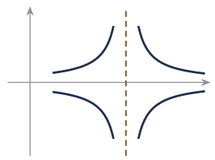


✧ **Remarque :** si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ alors $(\Delta) : y = ax + b$ est une asymptote oblique au $\mathcal{V}(\pm\infty)$.

Les branches infinies

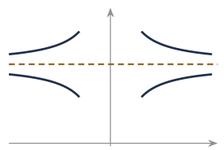
⊙ si : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$

alors : $x = a$ est une asymptote verticale de $\mathcal{C}_f$.



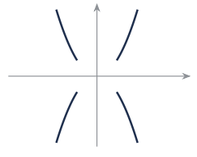
⊙ si : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$

alors : $y = b$ est une asymptote horizontale de $\mathcal{C}_f$ au $\mathcal{V}(\pm\infty)$.



⊙ si : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ → **on calcule :** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ldots$

$\pm\infty$	$a \in \mathbb{R}^*$	0
$\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe (Oy) au $\mathcal{V}(\pm\infty)$.	**On calcule :** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax] =$	$\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe (Ox) au $\mathcal{V}(\pm\infty)$.



$\pm\infty$	$b \in \mathbb{R}$
$\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite $y = ax$ au $\mathcal{V}(\pm\infty)$.	$\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ au $\mathcal{V}(\pm\infty)$.

