Maths Élites

2ème année Baccalauréat — Sciences Mathématiques • Année scolaire 2026 / 2027

CHAPITRE — Fonctions exponentielles

Fonctions exponentielles

Terminale SM · Bac SM → CPGE

Auteur	Date	Niveau	Programme	Contenu
R. Abed — Agrégé de Math.	_____	Terminale SM	Bac SM → CPGE	Cours démontré

Table des matières

Chapitre — Fonctions exponentielles 1
- Introduction . . . 2
- I. L'exponentielle népérienne . . . 2
  - Définition et premières propriétés . . . 2
  - Propriétés algébriques . . . 3
  - La notation e^x . . . 3
  - Équations et inéquations . . . 3
- II. Dérivation, primitives et limites . . . 4
  - Dérivabilité . . . 4
  - Variations, tangente et courbe . . . 4
  - Limites et croissances comparées . . . 6
  - Caractérisation par $f' = f$ . . . 7
- III. Exponentielles de base a et fonctions puissances . . . 7
  - Exponentielle de base a . . . 7
  - Fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ . . . 8
- IV. Étude d'une fonction et méthodes . . . 9
- Encart historique . . . 10
- Applications . . . 10
- Carte mentale . . . 11
- Glossaire des notations . . . 11
- Auto-évaluation : « Je sais / Pas encore » . . . 12
- Pour aller plus loin (CPGE) . . . 12

© 2026 — Tous droits réservés

Introduction

La fonction exponentielle est la bijection réciproque du logarithme népérien. Elle décrit toute grandeur dont la vitesse de variation est proportionnelle à sa valeur : désintégration radioactive, intérêts composés, décharge d'un condensateur, croissance d'une population. Elle est l'unique fonction dérivable égale à sa propre dérivée et valant 1 en 0 (théorème 8). Ce chapitre prolonge celui du logarithme népérien et prépare les équations différentielles $y' = ay + b$, le calcul intégral et l'étude des suites.

Boîte à outils — Objectifs

À la fin de ce chapitre, l'élève sait :

- définir exp comme réciproque de ln, en déduire ses propriétés et la relation $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$;
- dériver et primitiver les fonctions e^u, étudier une fonction contenant des exponentielles ;
- lever les formes indéterminées par les croissances comparées et les limites de référence ;
- manipuler $a^x = \mathrm{e}^{x\ln a}$ et $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$, traiter les formes 1^∞, 0^0, ∞^0 ;
- résoudre équations, inéquations et systèmes exponentiels, et exploiter la caractérisation $f' = f$.

Rappel de cours

Prérequis (logarithme népérien). ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ avec $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, strictement croissante, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\lim_{0^+} \ln = -\infty$, $\lim_{+\infty} \ln = +\infty$, $\ln e = 1$, $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Théorème de la bijection : si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, elle réalise une bijection de I sur $f(I)$, sa réciproque est continue ; si de plus f est dérivable et f' ne s'annule pas, $(f^{-1})' = \frac{1}{f'\circ f^{-1}}$.

I. L'exponentielle népérienne

1. Définition et premières propriétés

Définition — Exponentielle népérienne

La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et $\ln(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$. Elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est la *fonction exponentielle*, notée exp :

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0,+\infty[, \qquad x \longmapsto \exp(x).$$

Propriété — Propriétés immédiates

(1) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y > 0,\quad y = \exp(x) \iff x = \ln y.$

(2) $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(x)) = x \quad$ et $\quad \forall y > 0,\ \exp(\ln y) = y.$

(3) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0 ;\quad \exp(0) = 1 ;\quad \exp(1) = \mathrm{e}.$

(4) $\exp(x) = \exp(y) \iff x = y \quad$ et $\quad \exp(x) < \exp(y) \iff x < y$: exp est strictement croissante.

(5) exp est continue sur $\mathbb{R}$.

© 2026 — Tous droits réservés

(6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\exp(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp(x)=+\infty$.

Démonstration. Les points (1) à (3) traduisent la définition de la bijection réciproque ($\ln 1=0$ et $\ln \mathrm{e}=1$). Pour (4), ln étant strictement croissante, sa réciproque l'est aussi. Le point (5) est la continuité de la réciproque d'une bijection continue sur un intervalle. Pour (6), soit $A>0$: si $x>\ln A$ alors $\exp(x)>\exp(\ln A)=A$, d'où $\lim_{+\infty}\exp=+\infty$; soit $\varepsilon>0$: si $x<\ln\varepsilon$ alors $0<\exp(x)<\varepsilon$, d'où $\lim_{-\infty}\exp=0$.■

2. Propriétés algébriques

Théorème — Relation fonctionnelle

$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad \exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$.

Démonstration. $\ln\big(\exp(x)\exp(y)\big)=\ln\exp(x)+\ln\exp(y)=x+y$. Par (1), $\exp(x)\exp(y)=\exp(x+y)$.■

Propriété — Conséquences

Pour tous $x,y\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}^*$:

$$\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}\ ;\qquad \exp(x-y)=\frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$
$$\exp(nx)=\big(\exp(x)\big)^n\ ;\qquad \exp\Big(\frac{x}{q}\Big)=\sqrt[q]{\exp(x)}.$$

Plus généralement, pour $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$: $\exp\Big(\sum_{k=1}^{n}x_k\Big)=\prod_{k=1}^{n}\exp(x_k)$.

Démonstration. $\exp(x)\exp(-x)=\exp(0)=1$ donne la première relation, et $\exp(x-y)=\exp(x)\exp(-y)$ la deuxième. La troisième s'obtient par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ puis par passage à l'inverse pour $n<0$. Enfin $\big(\exp(\frac{x}{q})\big)^q=\exp(x)$ avec $\exp(\frac{x}{q})>0$: c'est la racine q-ième positive de $\exp(x)$. Le produit s'obtient par récurrence sur n.■

3. La notation e^x

On a $\exp(1)=\mathrm{e}$. Pour $n\in\mathbb{Z}$, $\exp(n)=\exp(1)^n=\mathrm{e}^n$. Pour $r=\frac{p}{q}$ ($p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}^*$), $\big(\exp(r)\big)^q=\exp(p)=\mathrm{e}^p$ et $\exp(r)>0$, donc $\exp(r)=\sqrt[q]{\mathrm{e}^p}=\mathrm{e}^r$. La fonction exp prolonge ainsi à $\mathbb{R}$ la puissance de base e définie sur $\mathbb{Q}$.

Définition — Notation

Pour tout réel x, on note $\mathrm{e}^x=\exp(x)$ ($\mathrm{e}\approx 2{,}71828$, nombre irrationnel : résultat admis).

Les relations précédentes s'écrivent : $\mathrm{e}^{x+y}=\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$, $\mathrm{e}^{-x}=\frac{1}{\mathrm{e}^x}$, $\mathrm{e}^{x-y}=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$, $(\mathrm{e}^x)^n=\mathrm{e}^{nx}$, $\mathrm{e}^{x/q}=\sqrt[q]{\mathrm{e}^x}$.

Piège à éviter — Erreurs classiques

$\mathrm{e}^{x+y}\neq\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y$; $(\mathrm{e}^x)^2=\mathrm{e}^{2x}\neq\mathrm{e}^{x^2}$; $\mathrm{e}^{-x}\neq-\mathrm{e}^x$; $\mathrm{e}^x>0$ pour tout x : l'équation $\mathrm{e}^x=-3$ n'a pas de solution.

4. Équations et inéquations

© 2026 — Tous droits réservés

Méthode — Résoudre une équation ou une inéquation exponentielle

- $e^u = e^v \iff u = v$; $e^u \leq e^v \iff u \leq v$.
- $e^u = k$: si $k > 0$, $u = \ln k$; si $k \leq 0$, aucune solution. $e^u \leq k$ (avec $k > 0$) $\iff u \leq \ln k$.
- Équation polynomiale en e^x : poser $X = e^x$, *avec la contrainte* $X > 0$, résoudre en X, puis revenir à x par $x = \ln X$.
- Équation $\ln u = k$: déterminer d'abord l'ensemble de définition, puis $u = e^k$.

Exemple — Équations et inéquations

1. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$: avec $X = e^x > 0$, $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2) = 0$, d'où $X \in \{1, 2\}$ et $S = \{0, \ln 2\}$.
2. $e^x - e^{-x} \leq 2$: avec $X = e^x > 0$, $X - \frac{1}{X} \leq 2 \iff X^2 - 2X - 1 \leq 0 \iff X \leq 1 + \sqrt{2}$ (l'autre racine $1 - \sqrt{2}$ est négative). Donc $S =]-\infty, \ln(1+\sqrt{2})]$.
3. $\ln(2 - x) = -3$: définie pour $x < 2$; $2 - x = e^{-3}$, d'où $S = \{2 - e^{-3}\}$.
4. $\ln(4x^2 - 1) = 2$: définie pour $|x| > \frac{1}{2}$; $4x^2 = e^2 + 1$, d'où $S = \left\{-\frac{\sqrt{e^2+1}}{2}, \frac{\sqrt{e^2+1}}{2}\right\}$ (les deux valeurs vérifient $|x| > \frac{1}{2}$).

II. Dérivation, primitives et limites

5. Dérivabilité

Théorème — Dérivée de l'exponentielle

exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$: $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ (e^x)' = e^x$.

Démonstration. ln est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\ln'(y) = \frac{1}{y} \neq 0$. Par le théorème de dérivation de la réciproque, exp est dérivable en tout x et $\exp'(x) = \dfrac{1}{\ln'(\exp x)} = \exp(x)$.■

Propriété — Composée et primitives

Soit u dérivable sur un intervalle I. La fonction e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u'\,e^u$. Réciproquement, $u'e^u$ admet pour primitives sur I les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Exemple — Primitives

Primitives sur $\mathbb{R}$ de :

1. $f(x) = e^{3x+2}$: $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x+2} + c$.
2. $f(x) = x\,e^{x^2+1} = \frac{1}{2}(x^2+1)'e^{x^2+1}$: $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2+1} + c$.
3. $f(x) = \sqrt{e^{3x}} = e^{3x/2}$: $F(x) = \frac{2}{3}e^{3x/2} + c$.
4. $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{2e^{2x}+3}} = \frac{1}{4} \cdot \dfrac{w'}{\sqrt{w}}$ avec $w = 2e^{2x} + 3$: $F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2e^{2x}+3} + c$.

6. Variations, tangente et courbe

© 2026 — Tous droits réservés

Propriété — Variations et convexité

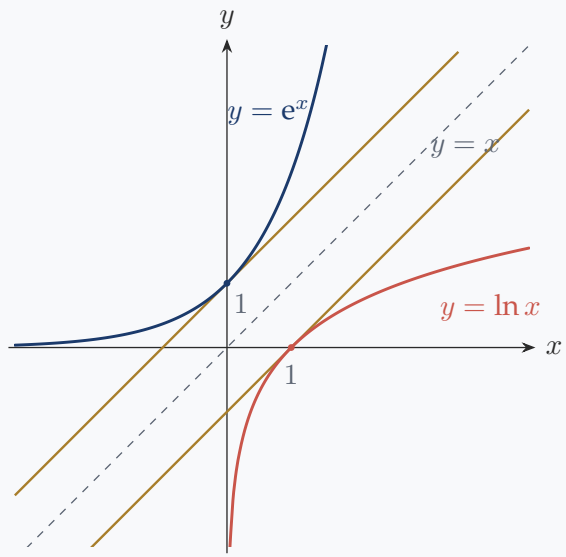
exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\exp'' = \exp > 0$. La courbe de exp admet l'axe des abscisses pour asymptote en $-\infty$ et une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$. La tangente en 0 a pour équation $y = x + 1$. Pour tous réels a et x :

$$\mathrm{e}^x \geq \mathrm{e}^a(1 + x - a), \qquad \text{en particulier} \quad \mathrm{e}^x \geq 1 + x \quad (a = 0), \quad \mathrm{e}^x \geq \mathrm{e}\,x \quad (a = 1).$$

Démonstration. La branche infinie en $+\infty$ découle de $\frac{\mathrm{e}^x}{x} \to +\infty$ (théorème 7). Soit $\psi(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^a(1 + x - a)$: $\psi'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^a$ est négative pour $x < a$ et positive pour $x > a$, donc ψ admet en a un minimum $\psi(a) = 0$.■

x	$-\infty$		$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$	
exp	0	↗	$+\infty$

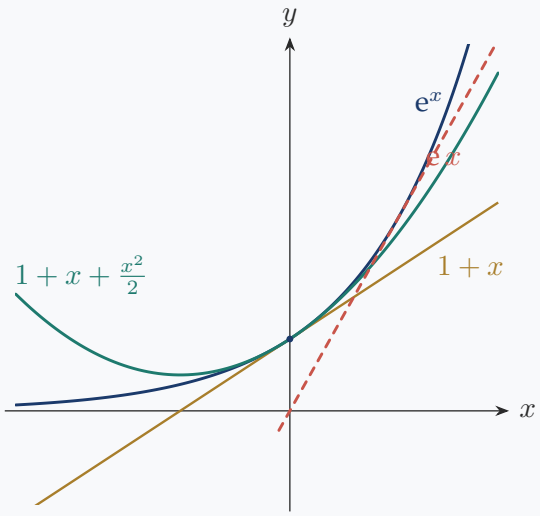
❑ **Courbes de $\exp$ et de $\ln$, symétriques par rapport à la droite $y = x$**



$\mathcal{C}_{\exp}$ et $\mathcal{C}_{\ln}$ sont symétriques par rapport à $y = x$; tangentes $y = x + 1$ en $(0, 1)$ et $y = x - 1$ en $(1, 0)$.

© 2026 — Tous droits réservés

❑ **Position de la courbe de exp par rapport à ses minorants**



$e^x \geq 1+x$ *sur* $\mathbb{R}$; $e^x \geq ex$ *sur* $\mathbb{R}$; $e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2}$ *sur* $[0,+\infty[$ *(exercice 6).*

À retenir

$(e^x)' = e^x$; $(e^u)' = u'e^u$; $\int u'e^u = e^u + c$; $e^x \geq 1+x$; $e^x > 0$; exp est strictement croissante et convexe.

7. Limites et croissances comparées

Théorème — Croissances comparées

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty\,; \qquad \lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0\,; \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0.$$

Démonstration. Soit $h(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ sur $[0,+\infty[$. On a $h'(x) = e^x - x \geq 1 + x - x = 1 > 0$ (car $e^x \geq 1+x$) : h est croissante et $h(x) \geq h(0) = 1 > 0$. Ainsi $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$ pour $x > 0$, d'où $\lim_{+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. Pour $n \geq 1$ et $t = \frac{x}{n}$: $\dfrac{e^x}{x^n} = \dfrac{1}{n^n}\left(\dfrac{e^t}{t}\right)^n \to +\infty$. La deuxième limite est l'inverse de la première. Pour la troisième, $X = -x \to +\infty$: $x^n e^x = (-1)^n \dfrac{X^n}{e^X} \to 0$.■

Propriété — Limites de référence en 0

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall a \in \mathbb{R},\ \lim_{x\to0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a.$$

Démonstration. La première limite est le nombre dérivé de exp en 0 : $\exp'(0) = e^0 = 1$. Pour $a \neq 0$, $\dfrac{e^{ax}-1}{x} = a \cdot \dfrac{e^{ax}-1}{ax} \to a \cdot 1$ (avec $t = ax \to 0$) ; pour $a = 0$ le quotient est nul.■

Méthode — Lever une forme indéterminée

Mettre en facteur le terme dominant, puis appliquer les croissances comparées : l'exponentielle l'emporte sur toute puissance en $+\infty$, et $x^n e^x \to 0$ en $-\infty$.

© 2026 — Tous droits réservés

Exemple — Limites en $+\infty$

1. $e^x - 3x = e^x(1 - 3xe^{-x}) \to +\infty$.
2. $e^x - e^{2x} = e^x(1 - e^x) \to -\infty$.
3. $e^x - x^2 - 4x = e^x(1 - x^2e^{-x} - 4xe^{-x}) \to +\infty$.
4. $\dfrac{e^x - x^2}{e^x - x^3} = \dfrac{1 - x^2e^{-x}}{1 - x^3e^{-x}} \to 1$.

8. Caractérisation par $f' = f$

Théorème — Unicité

Soit f dérivable sur un *intervalle* I tel que $f' = f$. Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = k\,e^x$ sur I. En particulier, exp est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Plus généralement, si $f' = af$ $(a \in \mathbb{R})$, alors $f(x) = k\,e^{ax}$.

Démonstration. Soit $g(x) = f(x)e^{-x}$: $g'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 0$ sur l'intervalle I, donc g est constante, égale à k. Pour $f' = af$, on pose $g(x) = f(x)e^{-ax}$.■

Remarque — Contre-exemple : l'hypothèse « intervalle » est essentielle

Sur $\mathbb{R}^*$, la fonction f égale à e^x sur $]-\infty, 0[$ et à $2e^x$ sur $]0, +\infty[$ vérifie $f' = f$ sans être de la forme ke^x : $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

III. Exponentielles de base a et fonctions puissances

9. Exponentielle de base a

Définition — Puissance réelle d'un réel strictement positif

Soit $a > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $a^x = e^{x \ln a}$.

Cette définition prolonge les puissances usuelles : $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^n = e^{n \ln a} = (e^{\ln a})^n$, $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ et $1^x = 1$. Pour $a \neq 1$, $y = a^x \iff \ln y = x \ln a \iff x = \frac{\ln y}{\ln a}$: la fonction $x \mapsto a^x$ est la bijection réciproque de $\log_a = \frac{\ln}{\ln a}$.

Propriété — Calcul sur les puissances

Pour $a, b > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$:

$$a^x > 0\,; \quad \ln(a^x) = x \ln a\,; \quad a^{x+y} = a^x a^y\,; \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$
$$(a^x)^y = a^{xy}\,; \quad (ab)^x = a^x b^x\,; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

Démonstration. $(a^x)^y = e^{y \ln(a^x)} = e^{xy \ln a} = a^{xy}$; $(ab)^x = e^{x(\ln a + \ln b)} = a^x b^x$; les autres relations découlent de $e^{u+v} = e^u e^v$.■

Théorème — Dérivée et variations de $x \mapsto a^x$

La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$. De plus :

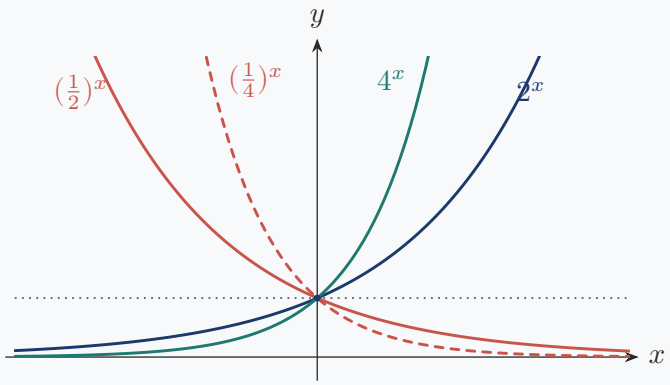
- si $a > 1$: strictement croissante, $\lim_{+\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{-\infty} a^x = 0$;

© 2026 — Tous droits réservés

- si $0 < a < 1$: strictement décroissante, $\lim_{+\infty} a^x = 0$, $\lim_{-\infty} a^x = +\infty$.

Démonstration. $(\mathrm{e}^{x\ln a})' = \ln a \cdot \mathrm{e}^{x\ln a}$, de signe celui de $\ln a$. Les limites se déduisent de celles de exp par composition avec $x \mapsto x\ln a$, qui tend vers $\pm\infty$ selon le signe de $\ln a$.■

❑ **Courbes de $x \mapsto a^x$ pour $a \in \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2, 4\}$**



Toutes les courbes passent par $(0,1)$ et ont l'axe des abscisses pour asymptote ; $\mathcal{C}_{a^x}$ et $\mathcal{C}_{(1/a)^x}$ sont symétriques par rapport à (Oy).

Méthode — Formes 1^∞, 0^0, ∞^0

Pour $u > 0$, écrire $u^v = \mathrm{e}^{v\ln u}$ et étudier la limite de l'exposant $v\ln u$ (forme $0\times\infty$) avant de composer avec exp.

Théorème — Limites de type e

Pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \mathrm{e}^a\ ; \qquad \lim_{t\to 0}(1+at)^{1/t} = \mathrm{e}^a\ ; \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a.$$

Démonstration. Pour $a \neq 0$ et $t = \frac{a}{x} \to 0$: $x\ln(1+\frac{a}{x}) = a\cdot\dfrac{\ln(1+t)}{t} \to a$, d'où la limite e^a par continuité de exp. La deuxième s'écrit $\mathrm{e}^{a\frac{\ln(1+at)}{at}} \to \mathrm{e}^a$. Le cas $a = 0$ est immédiat.■

Exemple — Limites de la forme 1^∞

1. $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$; $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x} = \lim\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^x\right]^3 = \mathrm{e}^6$.
2. $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x} \to \mathrm{e}^{-1}$.
3. $\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^{2x} = \mathrm{e}^{2x\ln(1+t)}$ avec $t = -\frac{2}{x+3} \to 0$; $2x\ln(1+t) = \dfrac{-4x}{x+3}\cdot\dfrac{\ln(1+t)}{t} \to -4$, d'où la limite e^{-4}.
4. $\lim_{x\to 0^+}(1+2x)^{3/x} = \mathrm{e}^6$.
5. $\sqrt[n]{n} = \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}} \to \mathrm{e}^0 = 1$.

10. Fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$

© 2026 — Tous droits réservés

Définition — Fonction puissance

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$. On a $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ et $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$.

Propriété — Dérivée et variations

La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Si $\alpha > 0$: strictement croissante, $\lim_{0^+} x^\alpha = 0$, $\lim_{+\infty} x^\alpha = +\infty$. Si $\alpha < 0$: strictement décroissante, $\lim_{0^+} x^\alpha = +\infty$, $\lim_{+\infty} x^\alpha = 0$.

Démonstration. $(\mathrm{e}^{\alpha \ln x})' = \frac{\alpha}{x}\mathrm{e}^{\alpha \ln x} = \alpha\, \mathrm{e}^{(\alpha-1)\ln x} = \alpha x^{\alpha-1}$. Les limites se déduisent de $\alpha \ln x \to \pm\infty$ $(x \to +\infty)$ et $\mp\infty$ $(x \to 0^+)$.■

Théorème — Croissances comparées généralisées

Pour tout réel $\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} = +\infty\,; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0\,; \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq \alpha$. Pour $x \geq 1$, $x^\alpha \leq x^n$, donc $\frac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} \geq \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} \to +\infty$. Ensuite $\dfrac{\ln x}{x^\alpha} = \dfrac{1}{\alpha} \cdot \dfrac{\ln(x^\alpha)}{x^\alpha} \to 0$ car $x^\alpha \to +\infty$ et $\frac{\ln t}{t} \to 0$. Enfin, avec $X = \frac{1}{x}$, $x^\alpha \ln x = -\dfrac{\ln X}{X^\alpha} \to 0$.■

Remarque

En particulier $x^x = \mathrm{e}^{x \ln x} \to \mathrm{e}^0 = 1$ quand $x \to 0^+$: la forme 0^0 est indéterminée, et il n'existe pas de valeur « naturelle » imposée à 0^0 par ce calcul.

À retenir

$a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$; $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$; $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$; $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$; $\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \to \mathrm{e}^a$; $\frac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} \to +\infty$ $(\alpha > 0)$.

IV. Étude d'une fonction et méthodes

Méthode — Étudier une fonction contenant des exponentielles

1. Ensemble de définition, parité, périodicité éventuelle.
2. Limites aux bornes ; lever les formes indéterminées par factorisation du terme dominant et croissances comparées ; branches infinies ($\frac{f(x)}{x}$ si $f \to \pm\infty$).
3. Dérivée : factoriser par e^u, dont le signe est toujours positif ; le signe de f' est celui du facteur restant.
4. Tableau de variations, extremums, équation des tangentes, éventuelles dérivées secondes (convexité, inflexion).
5. Courbe, en plaçant asymptotes, tangentes remarquables et points particuliers.

Exemple — Étude de $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$

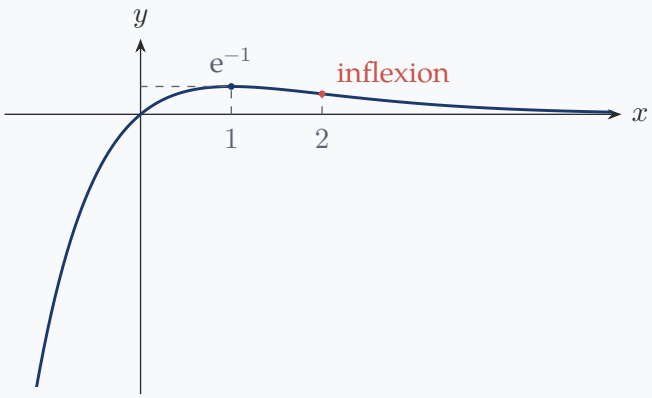
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. En $+\infty$, $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} \to 0$ (croissances comparées) : $y = 0$ est asymptote. En $-\infty$, $f(x) \to -\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = \mathrm{e}^{-x} \to +\infty$: branche parabolique de direction (Oy).

© 2026 — Tous droits réservés

$f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$ et $f''(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$. La fonction f est croissante sur $]-\infty, 1]$, décroissante sur $[1, +\infty[$, de maximum $f(1) = \mathrm{e}^{-1}$; la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse 2 ($f(2) = 2\mathrm{e}^{-2}$) et est concave sur $]-\infty, 2]$, convexe sur $[2, +\infty[$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	e^{-1}	↘	0

❑ **Courbe de f : $x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-x}$**



Maximum e^{-1} en $x = 1$, point d'inflexion d'abscisse 2, asymptote $y = 0$ en $+\infty$.

Astuce

Pour comparer e^u à 1 : $\mathrm{e}^u - 1$ a le signe de u. Pour les exposants, penser à transformer $\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x} = 1$ et à factoriser e^x (ou e^{-x}) dans les sommes.

Piège à éviter

Le signe de $f'(x) = P(x)\mathrm{e}^{u(x)}$ est celui de $P(x)$ uniquement ; une erreur fréquente consiste à étudier le signe de l'exponentielle. Autre erreur : transposer en $-\infty$ le résultat valable en $+\infty$: $\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = 0$ et non $+\infty$.

Encart historique

Remarque — De Neper à Euler

- **1614** : John Neper publie la première table de logarithmes. L'exponentielle apparaît d'abord comme l'opération inverse, qui permet de revenir de $\ln x$ à x.
- **1683** : Jacques Bernoulli étudie les intérêts composés et rencontre la limite $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, qui définit le nombre e.
- **XVIII$^{\text{e}}$ siècle** : Leonhard Euler adopte la lettre e et, dans son *Introductio in analysin infinitorum* (1748), traite e^x comme une fonction à part entière, avec les limites $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to \mathrm{e}^x$ et la série $\sum \frac{x^n}{n!}$.

© 2026 — Tous droits réservés

Applications

Exemple — Intérêts composés

Un capital C_0 placé au taux annuel r devient $C_0(1+r)^t$ après t années. Avec k capitalisations par an, il devient $C_0\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} \xrightarrow[k\to+\infty]{} C_0\,\mathrm{e}^{rt}$ (théorème 9) : c'est la *capitalisation continue*. Pour $r=5\,\%$ et $t=1$ an : $\mathrm{e}^{0{,}05}\approx 1{,}0513$, soit un rendement de $5{,}13\,\%$ contre $5\,\%$ en capitalisation annuelle.

Exemple — Décroissance radioactive

Le nombre de noyaux vérifie $N'=-\lambda N$, donc $N(t)=N_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$ (théorème 8). La demi-vie T est définie par $\mathrm{e}^{-\lambda T}=\frac{1}{2}$, soit $T=\frac{\ln 2}{\lambda}$. Pour le carbone 14, $T\approx 5730$ ans et $\lambda=\frac{\ln 2}{5730}\approx 1{,}21\times 10^{-4}$ an^{-1}.

Exemple — Circuit RC

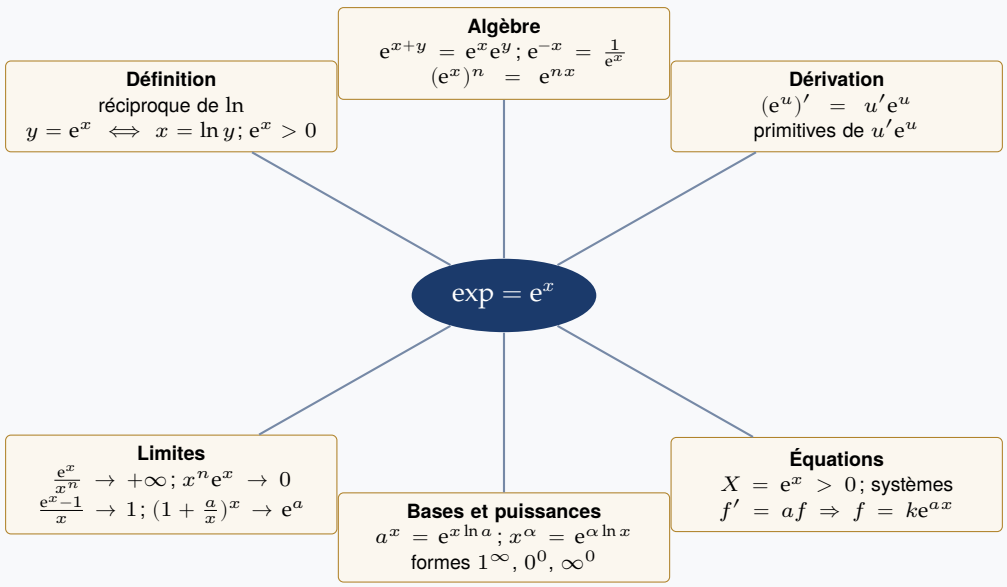
La tension aux bornes d'un condensateur qui se décharge dans une résistance vérifie $u_C(t)=E\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ avec $\tau=RC$. À $t=\tau$, $u_C=E\mathrm{e}^{-1}\approx 0{,}37\,E$; la tangente en $t=0$ coupe l'axe des temps en $t=\tau$.

Exemple — Informatique : complexité exponentielle

Un algorithme qui parcourt tous les sous-ensembles d'un ensemble à n éléments effectue $2^n=\mathrm{e}^{n\ln 2}$ opérations. Par croissances comparées, $\frac{2^n}{n^k}\to+\infty$ pour tout k : aucune complexité polynomiale ne rattrape l'exponentielle. Pour $n=60$, $2^{60}\approx 1{,}15\times 10^{18}$ opérations.

Carte mentale

❑ Carte mentale du chapitre



Les six pôles du chapitre autour de la fonction exponentielle.

Glossaire des notations

© 2026 — Tous droits réservés

Notation	Signification
$\exp(x)$, e^x	exponentielle népérienne, réciproque de ln
e	$\exp(1) \approx 2{,}71828$, unique réel tel que $\ln \mathrm{e} = 1$
a^x	$\mathrm{e}^{x \ln a}$, pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$
$\log_a$	$\dfrac{\ln}{\ln a}$ $(a > 0, a \neq 1)$, réciproque de $x \mapsto a^x$
x^α	$\mathrm{e}^{\alpha \ln x}$, pour $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$
$\sqrt[n]{x}$	$x^{1/n}$, racine n-ième positive de $x > 0$
$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	limite de f en a
$f^{(n)}$	dérivée n-ième de f
$[\![a, b]\!]$	ensemble des entiers compris entre a et b

Auto-évaluation : « Je sais / Pas encore »

Compétence	Je sais	Pas encore
Définir exp comme réciproque de ln et énoncer ses propriétés immédiates	☐	☐
Démontrer et utiliser $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$ et ses conséquences	☐	☐
Résoudre équations et inéquations exponentielles (changement d'inconnue $X = \mathrm{e}^x > 0$)	☐	☐
Résoudre un système exponentiel	☐	☐
Dériver e^u et déterminer une primitive de $u'\mathrm{e}^u$	☐	☐
Étudier une fonction contenant des exponentielles (tableau, branches infinies, courbe)	☐	☐
Lever une forme indéterminée par croissances comparées	☐	☐
Utiliser $\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \to 1$ et $\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \to \mathrm{e}^a$	☐	☐
Manipuler a^x et x^α, étudier une forme 1^∞ ou 0^0	☐	☐
Démontrer une inégalité avec $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$ ou par étude de fonction	☐	☐
Traiter une suite implicite ou une suite récurrente faisant intervenir e^x ou ln	☐	☐
Utiliser la caractérisation $f' = af$ et les équations fonctionnelles	☐	☐

Pour aller plus loin (CPGE)

Théorème — Série exponentielle

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$; en particulier $\mathrm{e} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$. Cette série définit l'exponentielle

© 2026 — Tous droits réservés

sur $\mathbb{C}$: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ (formule d'Euler), d'où $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$.

Théorème — Inégalité arithmético-géométrique

Pour $a_1, \dots, a_n > 0$, $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$.

Démonstration. Soit $m = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ et $x_k = \frac{a_k}{m} - 1$, de sorte que $\sum x_k = 0$. L'inégalité $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$ donne $\frac{a_k}{m} \leq \mathrm{e}^{x_k}$, d'où $\prod \frac{a_k}{m} \leq \mathrm{e}^{\sum x_k} = 1$, soit $a_1 \cdots a_n \leq m^n$.■

Remarque — Pistes

- **Équations différentielles linéaires** : les solutions de $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) sont $y = k\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$; celles de $y'' + ay' + by = 0$ s'obtiennent avec l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$.
- **Fonctions hyperboliques** : $\operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} = \frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$ (exercice 5) ; $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$.
- **Convexité** : exp est convexe, et ln concave ; l'inégalité de Jensen généralise l'inégalité arithmético-géométrique.
- **Croissance** : pour tous $a > 1$ et $\alpha > 0$, $\ln x \ll x^\alpha \ll a^x$ en $+\infty$ (la notation $\ll$ est hors programme de Terminale SM).

© 2026 — Tous droits réservés