

Devoir surveillé n° 9

Limites · Arctan · Bijection · Partie entière · TVI · Difficulté : 2 — Approfondissement

Durée
2 h

Auteur
R. Abed — Agrégé de Mathématiques

Année scolaire
2026 / 2027

Barème
20 points

Nom et prénom : Classe : Note : / 20

Consignes aux candidats

Calculatrice non autorisée · téléphones et appareils électroniques interdits · la clarté, la rigueur et la présentation entrent dans la note · tout résultat doit être justifié et **encadré** · les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix · un résultat admis peut être utilisé dans la suite. E désigne la fonction partie entière.

Exercice 1 — Calcul de limites

★★ Calculer 4 pts

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2(x+1)}}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^2(x+1)}}{x}$ 1 pt

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \operatorname{Arctan} \sqrt{x} - \frac{\pi}{2} x \right)$ 1 pt

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x\sqrt{x} + x} - \sqrt[6]{x^3 + x^2} \right)$ 1 pt

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + 1 - \sqrt[3]{8x^3 - x} \right)$ 1 pt

Sous-total : 4 pts

Exercice 2 — La formule de duplication dans tous les cas

★★★ Démontrer 4 pts

1. Montrer que : $(\forall x \in]1, +\infty[) \quad \operatorname{Arctan} \left(\frac{2x}{1-x^2} \right) = 2 \operatorname{Arctan} x - \pi.$ 1,5 pt

2. En déduire l'expression de $\operatorname{Arctan} \left(\frac{2x}{1-x^2} \right)$ en fonction de $\operatorname{Arctan} x$ pour $x \in]-\infty, -1[.$ 1 pt

3. Résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ l'équation $\operatorname{Arctan} \left(\frac{2x}{1-x^2} \right) = 2 \operatorname{Arctan} x.$ 1,5 pt

Sous-total : 4 pts

Exercice 3 — Racine cubique, Arctan et bijection

★★★ Raisonner

7 pts

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 + \sqrt[3]{x^3 - 2x^2} & \text{si } x \geq 2, \\ f(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right) & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. 1 pt
2. Étudier la continuité de f en 2, puis sur $\mathbb{R}$. 1,5 pt
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ et interpréter géométriquement le résultat. 1 pt
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$. Que peut-on en déduire? 1,5 pt
5. Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty, 2[$.
 - a) Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer. 1 pt
 - b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$. 1 pt

Sous-total : 7 pts**Exercice 4 — Partie entière et continuité**

★★ Raisonner

2,5 pts

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (x-1) \operatorname{E}\left(\frac{1}{x-1}\right) & \text{si } x \neq 1, \\ f(1) = 1. \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f en 1. 1,5 pt
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. 1 pt

Sous-total : 2,5 pts**Exercice 5 — Une corde horizontale de longueur 1**

★★★ Démontrer

2,5 pts

Soit h une fonction continue sur $[0, 2]$ telle que $h(0) = h(2)$. On pose, pour $x \in [0, 1]$: $\varphi(x) = h(x+1) - h(x)$.

1. Justifier que φ est continue sur $[0, 1]$ et calculer $\varphi(0) + \varphi(1)$. 1 pt
2. En déduire que l'équation $h(x+1) = h(x)$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0, 1]$. 1,5 pt

Sous-total : 2,5 pts

— Fin du sujet — Bon courage! —