

Devoir surveillé n° 8

Racines n -ièmes · Prolongement · Bijection · Fonction Arctan · Difficulté : 2 — Approfondissement

Durée
2 h

Auteur
R. Abed — Agrégé de Mathématiques

Année scolaire
2026 / 2027

Barème
20 points

Nom et prénom : Classe : Note : / 20

Consignes aux candidats

Calculatrice non autorisée · téléphones et appareils électroniques interdits · la clarté, la rigueur et la présentation entrent dans la note · tout résultat doit être justifié et **encadré** · les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix · un résultat admis peut être utilisé dans la suite.

Exercice 1 — Une équation du troisième degré

★★ Raisonner 4 pts

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : x^3 + 3x - 4 = 0$.

1. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. 1,5 pt
2. On pose $\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$. Établir que α est une solution de (E) . 1,5 pt
3. En déduire que $\alpha = 1$. 1 pt

Sous-total : 4 pts

Exercice 2 — Calcul de limites

★★ Calculer 3 pts

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arctan}(1 - \sqrt[3]{x^2}) - \frac{\pi}{4}}{x}$ 1 pt
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - (x + 1) \right) \text{Arctan} \left(\sqrt{x^2 + 2x} + x + 1 \right)$ 1 pt
3. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) \left(\text{Arctan} \frac{1}{x} + \frac{\pi}{2} \right)$ 1 pt

Sous-total : 3 pts

Exercice 3 — Racines n -ièmes et prolongement par continuité

★★★ Calculer 5 pts

On considère la fonction numérique g définie par : $g(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\text{Arctan}(\sqrt[4]{x} - 1)}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}$.

1. Déterminer D_g , le domaine de définition de g .

1 pt

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

1,5 pt

3. Montrer que g admet un prolongement par continuité en 1, que l'on déterminera (on pourra poser $t = \sqrt[12]{x}$).

2,5 pts

Sous-total : 5 pts

Exercice 4 — Une fonction et sa réciproque

★★★ Démontrer

8 pts

Soit f la fonction définie sur $] -\infty, \frac{\pi}{2}[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{1-x} + x - 1 & \text{si } x < 0, \\ f(x) = \text{Arctan}(\sqrt[3]{x} + \tan x) & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}[. \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue en 0.

1 pt

2. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$

1 pt

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$

1 pt

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

1 pt

3. Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [0, \frac{\pi}{2}[$.

a) Montrer que g est strictement croissante sur I .

0,75 pt

b) Montrer que g est une bijection de I sur I . On note g^{-1} la fonction réciproque de g .

1 pt

c) Résoudre dans I l'équation $g^{-1}(x) = x$.

1 pt

d) Montrer que : $(\forall x \in I) \quad g^{-1}(x) \leq x$.

1,25 pt

Sous-total : 8 pts

— Fin du sujet — Bon courage ! —