

Devoir surveillé n° 7

Fonction Arctan · Continuité · Bijection · TVI · Difficulté : 2 — Approfondissement

Durée
2 h

Auteur
R. Abed — Agrégé de Mathématiques

Année scolaire
2026 / 2027

Barème
20 points

Nom et prénom : Classe : Note : / 20

Consignes aux candidats

Calculatrice non autorisée · téléphones et appareils électroniques interdits · la clarté, la rigueur et la présentation entrent dans la note · tout résultat doit être justifié et **encadré** · les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix · un résultat admis peut être utilisé dans la suite.

Exercice 1 — Identité et équations avec la fonction Arctan

★★ Raisonner 5 pts

1. Montrer que $2 \operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} \frac{4}{3} = \pi$.

1,5 pt

2. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} 2x$.

a) Montrer que l'équation $\varphi(x) = \frac{\pi}{3}$ admet une unique solution x_0 dans $\mathbb{R}$, et que $0 < x_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

1 pt

b) Déterminer x_0 .

1 pt

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} 2x > \frac{\pi}{3}$.

1,5 pt

Sous-total : 5 pts

Exercice 2 — Calcul de limites

★★ Calculer 2,5 pts

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \operatorname{Arctan} \left(\frac{\sqrt{x}}{x+1} \right)$

0,75 pt

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}$

0,75 pt

3. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2 \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} \right) - \pi}{x-1}$

1 pt

Sous-total : 2,5 pts

Exercice 3 — Arctangente d'une racine cubique de la tangente

★★★ Démontrer

8 pts

Soit f la fonction définie sur $] -\infty, \frac{\pi}{2}]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \operatorname{Arctan}(\sqrt[3]{\tan x}) & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \\ f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}} & \text{si } x < 0, \\ f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. 1,5 pt
2. Montrer que f est continue en 0, puis calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement. 1,5 pt
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. 0,75 pt
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}}$ (on pourra poser $t = \frac{\pi}{2} - x$). 1,5 pt
5. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.
 - a) Montrer que g réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J à déterminer. 1 pt
 - b) Dresser le tableau de variations de g^{-1} . 0,5 pt
 - c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$. 1,25 pt

Sous-total : 8 pts

Exercice 4 — Une équation irrationnelle et le théorème des cordes

★★★ Raisonner

4,5 pts

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x} = 1$ (on pourra poser $t = \sqrt[3]{x}$). 1,5 pt
2. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$, et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$: $\varphi(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$.
 - a) Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\frac{k}{n}) = 0$. 1 pt
 - b) En déduire que : $(\exists c \in [0, 1 - \frac{1}{n}]) \quad f(c + \frac{1}{n}) = f(c)$. 2 pts

Sous-total : 4,5 pts

— Fin du sujet — Bon courage ! —