

Devoir surveillé n° 6

Limites · Continuité · Bijection et racines cubiques · Difficulté : 2 — Approfondissement

Durée
2 h

Auteur
R. Abed — Agrégé de Mathématiques

Année scolaire
2026 / 2027

Barème
20 points

Nom et prénom : Classe : Note : / 20

Consignes aux candidats

Calculatrice non autorisée · téléphones et appareils électroniques interdits · la clarté, la rigueur et la présentation entrent dans la note · tout résultat doit être justifié et **encadré** · les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix · un résultat admis peut être utilisé dans la suite.

Exercice 1 — Calcul de limites

★★ Calculer 4 pts

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\text{Arctan}(x - 1)}$

1 pt

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \sqrt{\cos x})}{x}$

1 pt

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} \text{Arctan } x - \frac{\pi}{2} x \right)$

1 pt

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right)$

1 pt

Sous-total : 4 pts

Exercice 2 — Une bijection définie par morceaux et sa réciproque

★★★ Raisonner 7 pts

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3} & \text{si } x \leq 1, \\ f(x) = 2 \text{Arctan} \left(\frac{2}{x+1} - 1 \right) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

1 pt

2. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

1,5 pt

3. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

1,5 pt

4. a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

1 pt

b) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$ (on distinguera les cas $x \geq 0$ et $x < 0$).

2 pts

Sous-total : 7 pts

Exercice 3 — Différence de racines cubiques

★★★ Démontrer

5 pts

On considère la fonction g définie sur $[0, 1]$ par : $g(x) = \sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{x}$.

1. Montrer qu'il existe au moins un réel $c \in]0, 1[$ tel que $\sqrt[3]{1-c} = \sqrt[3]{c} + c^3$.

1 pt

2. Montrer que g réalise une bijection de $[0, 1]$ sur un intervalle J à déterminer.

1,5 pt

3. Vérifier que $g(1-x) = -g(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$, puis en déduire que $(\forall x \in J) \quad g^{-1}(-x) = 1 - g^{-1}(x)$.

1 pt

4. Calculer $g^{-1}(0)$, puis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g^{-1}(x) - \frac{1}{2}}{x}$.

1,5 pt

Sous-total : 5 pts

Exercice 4 — Une distance moyenne égale à un demi

★★★★ Démontrer

4 pts

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels de l'intervalle $[0, 1]$. On considère la fonction h définie sur $[0, 1]$ par : $h(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |t - a_k| - \frac{1}{2}$.

1. Justifier que h est continue sur $[0, 1]$.

1 pt

2. Montrer que $h(0) + h(1) = 0$.

1,5 pt

3. En déduire que : $(\exists \alpha \in [0, 1]) \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\alpha - a_k| = \frac{1}{2}$.

1,5 pt

Sous-total : 4 pts

— Fin du sujet — Bon courage ! —