

Devoir surveillé n° 4

Continuité · Partie entière · Fonction Arctan · Difficulté : 2 — Approfondissement

Durée
2 h

Auteur
R. Abed — Agrégé de Mathématiques

Année scolaire
2026 / 2027

Barème
20 points

Nom et prénom : Classe : Note : / 20

Consignes aux candidats

Calculatrice non autorisée · téléphones et appareils électroniques interdits · la clarté, la rigueur et la présentation entrent dans la note · tout résultat doit être justifié et **encadré** · les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix · un résultat admis peut être utilisé dans la suite. E désigne la fonction partie entière.

Exercice 1 — Continuité d'une fonction définie par morceaux

★★★ Raisonner

9,5 pts

On pose $\alpha = 2 \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{3} \right) + \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{7} \right)$ et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \pi \frac{1 - \sqrt[4]{1 - x^3}}{x^2 \operatorname{Arctan} x} & \text{si } x < 0, \\ f(x) = \operatorname{Arctan} \left(\frac{E \left(\frac{1}{x} \right) - x}{E \left(\frac{1}{x} \right) + x} \right) & \text{si } x > 0, \\ f(0) = \alpha. \end{cases}$$

1. Montrer que $\alpha = \frac{\pi}{4}$. 1,5 pt

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. 2 pts

3. a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x E \left(\frac{1}{x} \right) = 1$. 1 pt

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. 1 pt

4. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$. La fonction f est-elle continue en $x_0 = 0$? 2 pts

5. a) Vérifier que $f(-\sqrt{3}) = \sqrt[4]{1 + 3\sqrt{3}} - 1$, puis montrer que $f(-\sqrt{3}) > \frac{1}{2}$. 1 pt

b) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet au moins une solution dans $] -\infty, -\sqrt{3}[$. 1 pt

Sous-total : 9,5 pts

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{4}{\pi} \operatorname{Arctan}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) & \text{si } x > 0, \\ f(x) = \sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{-x} & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

1. Déterminer D_f , puis calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2 pts

2. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad f(x) = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$.
(On pourra poser $\sqrt{x} = \tan \theta$ avec $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.)

2 pts

3. a) Montrer que f est continue en 0.

1 pt

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

2 pts

4. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$. Montrer que g est une bijection de $[0, +\infty[$ vers un intervalle J à déterminer, puis déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

2 pts

5. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution β dans $\mathbb{R}$ et que $0 < \beta < 1$.

1,5 pt

Sous-total : 10,5 pts

— Fin du sujet — Bon courage! —