

Devoir surveillé n° 3

Continuité · Bijection · Fonction Arctan · Difficulté : 2 — Approfondissement

Durée
2 h

Auteur
R. Abed — Agrégé de Mathématiques

Année scolaire
2026 / 2027

Barème
20 points

Nom et prénom : Classe : Note : / 20

Consignes aux candidats

Calculatrice non autorisée · téléphones et appareils électroniques interdits · la clarté, la rigueur et la présentation entrent dans la note · tout résultat doit être justifié et **encadré** · les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix · un résultat admis peut être utilisé dans la suite.

Exercice 1 — Valeurs intermédiaires et limites

★★ Calculer 4 pts

1. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[1, 2]$. Montrer que :

$$(\exists c \in]1, 2[) \quad f(c) = \frac{1}{c-2} + \frac{\sin c}{c-1}.$$

(On pourra introduire $h(x) = (x-1)(x-2)f(x) - (x-1) - (x-2)\sin x$.)

1,5 pt

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2+7} - \sqrt[4]{x+15}}{x-1}$.

1,25 pt

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2-x-1} - \sqrt[3]{1-x}}{1 - \sqrt[4]{1+x^2}}$.

1,25 pt

Sous-total : 4 pts

Exercice 2 — Bijection et point fixe

★★ Raisonner 4 pts

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \text{Arctan}(3x) + 2x - 1$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1,5 pt

2. Montrer que l'équation $f^{-1}(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$ et que $0 < \alpha < \frac{1}{3}$.

1,5 pt

3. Montrer que $\alpha = 1 - \text{Arctan}(3\alpha)$, puis en déduire que $1 - \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{1}{3}$.

1 pt

Sous-total : 4 pts

Exercice 3 — Formule d'addition de la fonction Arctan

★★★ Démontrer

6 pts

Soient a et b deux réels tels que $ab < 1$. On pose $\alpha = \text{Arctan } a$ et $\beta = \text{Arctan } b$.

1. a) Montrer que $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta (1 - ab)$.

1 pt

b) En déduire que $-\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$.

1 pt

2. Montrer que $\text{Arctan } a + \text{Arctan } b = \text{Arctan} \left(\frac{a+b}{1-ab} \right)$.

1,5 pt

3. Applications.

a) Calculer $\text{Arctan } 2 + \text{Arctan } 5 + \text{Arctan } 8$.

1,25 pt

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\text{Arctan} \left(\frac{x}{1-x} \right) + \frac{\pi}{4} \right)$.

1,25 pt

Sous-total : 6 pts**Exercice 4 — Une fonction impaire et sa réciproque**

★★★ Démontrer

6 pts

On considère la fonction f , **impaire**, définie sur $\mathbb{R}$ et telle que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+) \quad f(x) = x - 3\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x}.$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

0,5 pt

2. Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}_+) \quad f(x) = (\sqrt[3]{x} - 1)^3 + 1$, puis étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

1 pt

3. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire sa monotonie sur $\mathbb{R}_-$.

1 pt

4. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

1 pt

5. a) Montrer que f^{-1} est impaire.

1 pt

b) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ (on distinguera les cas $0 \leq x < 1$ et $x \geq 1$).

1,5 pt

Sous-total : 6 pts

— Fin du sujet — Bon courage! —