

Limites & Continuité

Devoir surveillé n°2 — Bijection, limites, Arctangente

Difficulté : 2 — Approfondissement



AUTEUR

R. Abed — Agrégé de Math.

NIVEAU & FILIÈRE

Terminale Sciences Mathématiques

ANNÉE SCOLAIRE DURÉE · BARÈME

2026 / 2027

4 h · /20

Nom & Prénom : Classe : Note : /20

Consignes aux candidats

- Calculatrice **non autorisée** ; téléphone et tout appareil connecté **interdits**.
- La **clarté**, la **rigueur** et la **présentation** entrent dans l'évaluation.
- Tout résultat doit être **justifié** ; **encadrer** les résultats finaux.
- Les exercices sont **indépendants** et peuvent être traités dans l'ordre choisi ; numéroté clairement les questions.
- Un résultat **admis** dans une question antérieure peut être réutilisé.

Exercice 1 — Bijection et fonction réciproque

★★★☆☆ Important

Soit f la fonction définie sur $] -2, 2[$ par $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$.

3 pts

1. Montrer que f est une bijection de $] -2, 2[$ vers $\mathbb{R}$.

(1,5 pt)

2. Calculer $f^{-1}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(1,5 pt)

Exercice 2 — Une identité à exposants fractionnaires

★★☆☆☆ Classique

Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que

1 pt

$$\left(a^2 + a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(b^2 + a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}. \quad (1 \text{ pt})$$

Exercice 3 — Calcul de limites

★★★☆☆ Classique

6 pts

Calculer les limites suivantes (barème de chaque limite indiqué entre parenthèses).

- | | | | |
|--|--------|---|--------|
| 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[4]{x} \sqrt[12]{x}}{3\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x}}$ | (0,25) | 10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\sqrt[3]{1+2x} \frac{1}{x^4}}$ | (0,5) |
| 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sqrt[4]{x+1}}{1 - \sqrt[3]{x+1}}$ | (0,25) | 11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$ | (0,25) |
| 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left(\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt[3]{x^3+x^2} \right)$ | (0,5) | 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctan}(x^2+x)}{x}$ | (0,25) |
| 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt[3]{x+8}}{x}$ | (0,25) | 13) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{Arctan}(\sqrt{\tan x})}{\sqrt{\operatorname{Arctan} x}}$ | (0,25) |
| 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{4}} \left(\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x-1} \right)$ | (0,5) | 14) $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x-3) \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3-x}\right)$ | (0,25) |
| 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+2} - \sqrt[4]{x^4+1} \right)$ | (0,5) | 15) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{Arctan} \sqrt{x} - \operatorname{Arctan} \sqrt[3]{x}}{x-1}$ | (0,5) |
| 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^5 + x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{7}{3}}}$ | (0,25) | 16) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (\operatorname{Arctan}(1+x^2) + \operatorname{Arctan}(1-x))$ | (0,5) |
| 8) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 1 + (x-1)^{\frac{3}{2}}}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}$ | (0,5) | 17) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{Arctan}(2x^2-1) - \frac{\pi}{4}}{x-1}$ | (0,25) |
| 9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^{\frac{5}{3}}}$ | (0,25) | | |

Exercice 4 — Identités sur l'Arctangente

★★★★ Important

4 pts

Montrer que :

$$1. \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}. \quad (0,5 \text{ pt})$$

$$2. (\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}. \quad (0,5 \text{ pt})$$

$$3. (\forall x \in \mathbb{R}_-^*) : \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}. \quad (0,25 \text{ pt})$$

$$4. (\forall x \in \mathbb{R}) : \cos(\operatorname{Arctan} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \quad (0,5 \text{ pt})$$

$$5. (\forall x \in \mathbb{R}) : \sin(\operatorname{Arctan} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \quad (0,25 \text{ pt})$$

$$6. 2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} = \operatorname{Arctan} \frac{4}{3}. \quad (0,5 \text{ pt})$$

$$7. (\forall x \in]-1, 1[) : \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = 2 \operatorname{Arctan} x. \quad (0,5 \text{ pt})$$

$$8. (\forall x \in \mathbb{R}) : \operatorname{Arctan} x + 2 \operatorname{Arctan}(\sqrt{x^2+1} - x) = \frac{\pi}{2}. \quad (1 \text{ pt})$$

Exercice 5 — Équations avec l'Arctangente

★★★★ Classique

2,5 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$1. \operatorname{Arctan}(3x) + \operatorname{Arctan}(2x) = \frac{\pi}{4}. \quad (1 \text{ pt})$$

$$2. \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\pi}{4}. \quad (1,5 \text{ pt})$$

Exercice 6 — Étude d'une fonction Arctangente

★★★★ Important

3,5 pts

Soit f la fonction définie par $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+\sqrt{3}}{1-x\sqrt{3}}\right)$.1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ et calculer les limites aux bornes. (1,5 pt)2. Étudier la continuité de f sur $\mathcal{D}_f$. (0,5 pt)3. Montrer que : (1,5 pt)

$$f(x) = \operatorname{Arctan} x - \frac{2\pi}{3} \text{ si } x > \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad f(x) = \operatorname{Arctan} x + \frac{\pi}{3} \text{ si } x < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(On pourra poser $x = \tan t$ avec $|t| < \frac{\pi}{2}$.)

Fin du sujet — Bon courage !