

Devoir surveillé n° 11

Limites · Fonction Arctan · Bijection et réciproque · Difficulté : 2 — Approfondissement

Durée
2 h

Auteur
R. Abed — Agrégé de Mathématiques

Année scolaire
2026 / 2027

Barème
20 points

Nom et prénom : Classe : Note : / 20

Consignes aux candidats

Calculatrice non autorisée · téléphones et appareils électroniques interdits · la clarté, la rigueur et la présentation entrent dans la note · tout résultat doit être justifié et **encadré** · les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix · un résultat admis peut être utilisé dans la suite.

Exercice 1 — Calcul de limites

★★ Calculer 3 pts

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{x}$

0,75 pt

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[4]{x^4 + x^2 + 1} + x - 2 \right)$

1,25 pt

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt{x+1}}$

1 pt

Sous-total : 3 pts

Exercice 2 — Une fonction paire définie par Arctan

★★★ Démontrer 10 pts

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x \operatorname{Arctan} \left(\frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x} \right) & \text{si } x \neq 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f en 0.

1 pt

2. Étudier la parité de la fonction f .

1 pt

3. a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad f(x) = \frac{\pi}{2}x - \frac{x}{2} \operatorname{Arctan} x$ (on pourra poser $x = \tan \alpha$ avec $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$).

2 pts

b) En déduire une expression simple de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1 pt

4. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement les résultats.

1 pt

5. Montrer que la droite $(D) : y = \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

1 pt

6. On considère dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $(E) : \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}{x}\right) = \frac{5\pi}{12}$.

a) Montrer que : $(E) \iff f(\sqrt{x}) = \frac{5\pi}{12}\sqrt{x}$.

1,5 pt

b) En déduire les solutions de l'équation (E) .

1,5 pt

Sous-total : 10 pts

Exercice 3 — Racine quatrième et tangente

★★★ Raisonner

7 pts

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x) = \sqrt[4]{1 + \frac{15}{\tan^4 x}} - 2$.

1. Montrer que g est continue sur I et calculer $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} g(x)$.

1,5 pt

2. Montrer que g est strictement décroissante sur I .

1 pt

3. Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.

1 pt

4. Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

1,5 pt

5. Montrer que $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} \frac{g(x)}{x - \frac{\pi}{4}} = -\frac{15}{4}$ (on pourra utiliser $\tan x - 1 = \tan(x - \frac{\pi}{4})(1 + \tan x)$).

2 pts

Sous-total : 7 pts

— Fin du sujet — Bon courage! —