

Devoir surveillé n° 10

Arctan et demi-angle · Limites · Bijections et réciproques · Difficulté : 2 — Approfondissement

Durée
2 h

Auteur
R. Abed — Agrégé de Mathématiques

Année scolaire
2026 / 2027

Barème
20 points

Nom et prénom : Classe : Note : / 20

Consignes aux candidats

Calculatrice non autorisée · téléphones et appareils électroniques interdits · la clarté, la rigueur et la présentation entrent dans la note · tout résultat doit être justifié et **encadré** · les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix · un résultat admis peut être utilisé dans la suite.

Exercice 1 — Demi-angle et fonction Arctan

★★★ Démontrer 5 pts

1. Montrer que : $\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) \quad \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}}$. 1,5 pt
2. a) Montrer que, pour tout $a \in [0, +\infty[$: $\text{Arctan}(\sqrt{a} + \sqrt{a+1}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \text{Arctan}(\sqrt{a})$. 2 pts
 b) En déduire que $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 + \sqrt{3}$. 1,5 pt

Sous-total : 5 pts

Exercice 2 — Calcul de limites

★★★ Calculer 3 pts

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{2-x} - \sqrt[6]{2-x}}{\sqrt[3]{2-x} - \sqrt{2-x}}$ (on pourra poser $t = \sqrt[12]{2-x}$) 1,5 pt
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - (x+1) \right) \text{Arctan} \left(\sqrt{x^2 + 2x} + x + 1 \right)$ 1,5 pt

Sous-total : 3 pts

Exercice 3 — Réciproque d'une fonction trigonométrique

★★ Raisonner 5 pts

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \frac{-1}{1 - \tan^3 x}$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. 2 pts

2. Dresser le tableau de variations de f^{-1} .

1 pt

3. Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

2 pts

Sous-total : 5 pts

Exercice 4 — Une bijection de $\mathbb{R}^-$ et sa réciproque

★★★ Raisonner

7 pts

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0]$ par : $f(x) = 5 - \left(\frac{1}{1 + \sqrt{-x}} - 1 \right)^3$.

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^-$.

1 pt

2. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

1,5 pt

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, puis en déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^-$ sur un intervalle J à déterminer.

1,5 pt

4. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

2 pts

5. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - 5}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat.

1 pt

Sous-total : 7 pts

— Fin du sujet — Bon courage ! —