

Continuité & fonction Arctangente

Devoir surveillé n° 1 — Bijection, réciproque, Arctan

Difficulté : 2 — Approfondissement



AUTEUR

R. Abed — Agrégé de Math.

NIVEAU & FILIÈRE

Terminale Sciences Mathématiques

ANNÉE SCOLAIRE DURÉE · BARÈME

2026 / 2027

2 h · /20

Nom & Prénom : Classe : Note : /20

Consignes aux candidats

- Calculatrice **non autorisée**; téléphone et tout appareil connecté **interdits**.
- La **clarté**, la **rigueur** et la **présentation** entrent dans l'évaluation.
- Tout résultat doit être **justifié**; **encadrer** les résultats finaux.
- Les exercices sont **indépendants** et peuvent être traités dans l'ordre choisi; numéroté clairement les questions.
- Un résultat **admis** dans une question antérieure peut être réutilisé.

Exercice 1 — Équation, fonction réciproque, formule de Cardan

★★☆☆ Classique

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = x^3 - 3x - 3$.

3,5 pts

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1, +\infty[$ et que $2 < \alpha < 3$. (1,5 pt)

2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(x) - \alpha}{x} = \frac{1}{3(\alpha^2 - 1)}$. (1 pt)

3. Vérifier que $\alpha = a + \frac{1}{a}$ avec $a = \frac{\sqrt[3]{12 + 4\sqrt{5}}}{2}$. (1 pt)

Exercice 2 — Formules d'addition de l'Arctangente

★★★★ Important

1. Montrer que : $(\forall (a, b) \in]-1, 1[^2) \quad \text{Arctan } a + \text{Arctan } b = \text{Arctan} \left(\frac{a+b}{1-ab} \right)$. (1 pt)

2. (a) En déduire les solutions dans $]0, 1[$ de l'équation : (1 pt)

$$\text{Arctan} \left(\frac{1-x}{2} \right) + \text{Arctan} \left(\frac{x+1}{2} \right) = \text{Arctan} \left(\frac{8}{7} \right).$$

(b) En déduire que : (1 pt)

$$(\forall x \in [0, +\infty[) \quad \text{Arctan} \left(\frac{1}{x+1} \right) - \text{Arctan} \left(\frac{1}{x+2} \right) = \text{Arctan} \left(\frac{1}{x^2 + 3x + 3} \right).$$

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\text{Arctan}(\sqrt{x} + 1) - \text{Arctan}(\sqrt{x} - 1) \right)$. (1,5 pt)

4. Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{k^2 + 3k + 3} \right)$. (1,5 pt)

Exercice 3 — Étude d'une fonction définie par Arctan

★★★★ Important

Soit f la fonction définie par $f(x) = \operatorname{Arctan} \left(\frac{2\sqrt{x} - 2}{x - 2\sqrt{x}} \right)$. (6,5 pts)

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$, puis calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$. (1,5 pt)

2. (a) Montrer que : (1 pt)

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{4\}) (\exists! \alpha \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{\frac{\pi}{4}\}) \quad \tan \alpha = \sqrt{x} - 1.$$

- (b) En déduire que : (1,5 pt)

$$f(x) = -2 \operatorname{Arctan}(\sqrt{x} - 1) \text{ si } 0 < x < 4 \quad \text{et} \quad f(x) = \pi - 2 \operatorname{Arctan}(\sqrt{x} - 1) \text{ si } x > 4.$$

3. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0, 4[$.

- (a) Montrer que g est une bijection de $]0, 4[$ vers un intervalle J à déterminer. (1 pt)

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : (1,5 pt)

$$(\forall (x_1, \dots, x_n) \in]0, 4[^n) (\exists! c \in]0, 4[) \quad \operatorname{Arctan} \left(\frac{2\sqrt{c} - 2}{c - 2\sqrt{c}} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{2}{n} \operatorname{Arctan} (1 - \sqrt{x_k}).$$

Exercice 4 — Valeurs intermédiaires et calculs de limites

★★★★ Classique

1. Soit f continue sur $[a, b]$. Montrer que $(\exists c \in [a, b]) \quad 2f(a) + 3f(b) = 5f(c)$. (4 pts) (1 pt)

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x^2-3}}{\tan\left(\frac{\pi x}{8}\right) - 1}$. (2 pts)

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{4 - E(1 + \sqrt[3]{x})}{x - 8}$ (E : partie entière). (1 pt)

Fin du sujet — Bon courage !