Maths Elites
2e Bac / Terminale Sciences Mathématiques

Devoir libre n° 2

Dérivabilité · Primitives · Fonction Arctan

Date de remise	Auteur	Année scolaire	Barème
..... / ..... / 2026	R. Abed — Agrégé de Maths	2026 / 2027	40 points

Nom et prénom : ..... **Classe :** ..... **Note :** ..... / 40

Consignes aux candidats

Devoir à rédiger **individuellement**, sur copie double, avec soin : la clarté, la rigueur et la présentation sont notées. Justifier chaque résultat et **encadrer** les résultats finaux. Rédiger **exclusivement** avec les outils du programme (taux d'accroissement, théorème des accroissements finis, quantité conjuguée, encadrements, théorème de la bijection) : ni développements limités, ni équivalents, ni règle de L'Hôpital. Un résultat admis dans une question peut être utilisé dans les suivantes. Numéroter exercices et questions comme dans l'énoncé. **Le barème est sur 40 points.**

Exercice 1 — Racines et changements d'écriture

★★★ Méthode — 1,5 pt

Déterminer une primitive de f sur l'intervalle I indiqué (on précisera la fonction u utilisée).

1. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$, $I =]0, +\infty[$; — 0,25 pt
2. $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$, $I = \mathbb{R}$; — 0,25 pt
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$, $I =]0, +\infty[$; — 0,25 pt
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x^3}$, $I =]0, +\infty[$; — 0,25 pt
5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}\,(1+\sqrt[3]{x^2})}$, $I =]0, +\infty[$; — 0,25 pt
6. $f(x) = x^5\sqrt{1+x^3}$, $I =]-1, +\infty[$. — 0,25 pt

Sous-total : 1,5 pt

Exercice 2 — Puissances, binôme et somme Σ

★★★ Méthode — 1,5 pt

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer, sous forme d'une somme Σ, une primitive de f sur l'intervalle I indiqué.

1. $f(x) = x^n\sqrt{1-x}$, $I =]-\infty, 1]$ (*écrire* $x = 1-(1-x)$) ; — 0,25 pt

2. $f(x) = x^{2n+1}\sqrt{1+x^2}$, $I = \mathbb{R}$ (*écrire* $x^{2n+1} = x\big((1+x^2)-1\big)^n$) ; **0,25 pt**

3. $f(x) = x^{3n+2}\sqrt[3]{1+x^3}$, $I = [-1, +\infty[$; **0,25 pt**

4. $f(x) = \sin^{2n+1} x$, $I = \mathbb{R}$ (*écrire* $\sin^{2n+1} x = \sin x\,(1-\cos^2 x)^n$) ; **0,25 pt**

5. $f(x) = \dfrac{1}{\cos^{2n+2} x}$, $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (*écrire* $\dfrac{1}{\cos^{2n+2} x} = (1+\tan^2 x)(1+\tan^2 x)^n$). **0,25 pt**

Contrôle : pour $n = 1$, retrouver dans la question 5 la primitive $\tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x$ de $\dfrac{1}{\cos^4 x}$. **0,25 pt**

Sous-total : 1,5 pt

Exercice 3 — Primitives par changement d'écriture ★★★ Classique 3,5 pts

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel.

1. Déterminer, sous forme d'une somme $\sum$, une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f_n : x \mapsto \dfrac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}}$. (*On écrira* $x^{2n+1} = x\big((1+x^2)-1\big)^n$ *et on développera avec la formule du binôme.*) **1,25 pt**

2. Même question pour $h_n : x \mapsto \dfrac{x^{2n+1}}{(1+x^2)^{n+2}}$. **1,25 pt**

3. *Contrôle.* Pour $n = 1$, écrire sans symbole $\sum$ une primitive de f_1 et une primitive de h_1, puis vérifier chacune en la dérivant. **1 pt**

Sous-total : 3,5 pts

Exercice 4 — Dérivabilité en un point et interprétation géométrique ★ Classique 1,5 pt

Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de f au point indiqué et interpréter géométriquement le résultat.

1. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$, définie sur $\mathbb{R}$, au point $x_0 = 1$ (à droite puis à gauche). **0,5 pt**

2. $f(x) = \arctan\big(\sqrt{x^2-1}\big)$, définie sur $[1, +\infty[$, à droite au point $x_0 = 1$. **0,5 pt**

3. $f(x) = \sqrt{\big(4 - \sqrt[3]{x^2}\big)^3}$, définie sur $[-8, 8]$, à gauche au point $x_0 = 8$. *On pourra poser* $s = \sqrt[3]{x^2}$ *pour* $x \in]0, 8[$. **0,5 pt**

Sous-total : 1,5 pt

Exercice 5 — Dérivabilité, demi-tangentes et théorème des accroissements finis ★★ Important 3,5 pts

1. On considère $f(x) = \sqrt{1-\cos x}$, définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f(x) = \sqrt{2}\,\left|\sin\frac{x}{2}\right|$ pour tout réel x, puis étudier la dérivabilité de f en 0 à droite et à gauche. Interpréter géométriquement le résultat. **1 pt**

2. On considère $g(x) = \arctan\sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$. Étudier la dérivabilité de g à droite en 0 et interpréter géométriquement (on admet $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\arctan t}{t} = 1$). **0,75 pt**

3. Soient a et b deux réels tels que $0 \leq a < b$. Montrer, à l'aide du théorème des accroissements finis, que

$$\frac{b-a}{1+b^2} \leq \arctan b - \arctan a \leq \frac{b-a}{1+a^2}.$$

1 pt

4. En déduire un encadrement de $x^2(\arctan(x+1) - \arctan x)$ pour $x > 0$, puis la limite de cette expression quand $x \to +\infty$. 0,75 pt

Sous-total : 3,5 pts

Exercice 6 — Réciproque de la restriction de cosinus

★★★ Classique — 2 pts

Soit f la fonction définie sur $I =]0, \pi[$ par $f(x) = \cos x$.

1. **a)** Montrer que f est une bijection de I sur un intervalle J à déterminer. 0,25 pt

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et que, pour tout $x \in J$: $(f^{-1})'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$. 0,25 pt

2. On considère la fonction φ définie par $\varphi(x) = f^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\right)$.

a) Montrer que $\mathcal{D}_\varphi = [0, +\infty[$, calculer $\varphi(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$. 0,25 pt

b) Montrer que φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$: $\varphi'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{x}\,(x+1)}$. 0,25 pt

3. **a)** On pose $\psi(x) = \varphi(x) + \arctan\sqrt{x}$ pour $x \geq 0$. Montrer que ψ est constante sur $[0, +\infty[$, puis que $\varphi(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\sqrt{x}$ pour tout $x \geq 0$. 0,5 pt

b) Étudier la dérivabilité de φ à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat. 0,25 pt

c) Dresser le tableau de variations de φ, puis tracer $\mathcal{C}_\varphi$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. 0,25 pt

Sous-total : 2 pts

Exercice 7 — Calcul de limites à l'aide du théorème des accroissements finis

★★★ Classique — 1,5 pt

En utilisant le théorème des accroissements finis, calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}\right)$. 0,5 pt

2. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\arctan\sqrt{x+2} - \arctan\sqrt{2}}{x}$. 0,5 pt

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x^{n-1}}\left(\sqrt[n]{x+1} - \sqrt[n]{x}\right)$, où n est un entier tel que $n \geq 2$. 0,5 pt

Sous-total : 1,5 pt

Exercice 8 — Rolle sur une infinité d'intervalles : l'équation $\tan x = x$ ★★★ Classique — 1,75 pt

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ si $x \in]0,1]$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est continue sur $[0,1]$. — 0,25 pt

2. Montrer que f n'est pas dérivable à droite en 0 (on admet que la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$). — 0,25 pt

3. Justifier que f est dérivable sur $]0,1]$ et calculer $f'(x)$. — 0,25 pt

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $c_n \in \left]\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right[$ tel que $f'(c_n) = 0$. — 0,5 pt

5. **a)** Montrer que $\cos\left(\dfrac{\pi}{c_n}\right) \neq 0$, puis que $t_n = \dfrac{\pi}{c_n}$ vérifie $\tan t_n = t_n$. — 0,25 pt

b) En déduire que l'équation $\tan x = x$ admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$. — 0,25 pt

Sous-total : 1,75 pt

Exercice 9 — Arctangente et sommes télescopiques ★★★ Original — 1,75 pt

1. Soit $b \geq 0$. On pose, pour $x \geq 0$: $\varphi(x) = \arctan\dfrac{x-b}{1+bx}$.

a) Montrer que φ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $\varphi'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. — 0,25 pt

b) En déduire que, pour tous réels $a \geq 0$ et $b \geq 0$: $\arctan a - \arctan b = \arctan\dfrac{a-b}{1+ab}$. — 0,25 pt

2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\arctan\dfrac{1}{k^2+k+1} = \arctan(k+1) - \arctan k$. En déduire $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\frac{1}{k^2+k+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. — 0,5 pt

3. Calculer de même $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \arctan\frac{2}{k^2}$ et sa limite. — 0,25 pt

4. Trouver une suite (a_k) telle que $\arctan\dfrac{1}{2k^2} = \arctan a_k - \arctan a_{k-1}$ pour $k \geq 1$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \arctan\frac{1}{2k^2}$. — 0,5 pt

Sous-total : 1,75 pt

Exercice 10 — Une identité binomiale démontrée par primitivation ★★★★ Original — 1,75 pt

Pour $p, m \in \mathbb{N}$, on note $P_{p,m}$ la primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x^p(1-x)^m$ qui s'annule en 0, et l'on pose $J(p,m) = P_{p,m}(1)$.

1. En développant $(1-x)^m$, montrer que $J(p,m) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k \mathrm{C}_m^k}{p+k+1}$. — 0,25 pt

2. Calculer $J(p,0)$. — 0,25 pt

3. Soit $m \geq 1$. Calculer la dérivée de $x \mapsto x^{p+1}(1-x)^m$ et en déduire que, pour tout réel x :

$$x^{p+1}(1-x)^m = (p+1)\,P_{p,m}(x) - m\,P_{p+1,m-1}(x).$$

0,5 pt

4. En déduire que $J(p,m) = \dfrac{m}{p+1}\,J(p+1,m-1)$, puis, par récurrence sur m, que

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k\,\mathrm{C}_m^k}{p+k+1} = \frac{p!\;m!}{(p+m+1)!}.$$

0,5 pt

5. *Application.* Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k\,\mathrm{C}_m^k}{k+1}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\,\mathrm{C}_n^k}{n+k+1}$, et vérifier ces valeurs par un calcul direct pour $m=3$ et $n=2$.

0,25 pt

Sous-total : 1,75 pt

Exercice 11 — Encadrer une somme à l'aide d'une primitive

★★★★ Important — 2,75 pts

1. **Lemme.** Soit $p \in \mathbb{N}$, f une fonction continue et *décroissante* sur $[p,+\infty[$ et F une primitive de f sur cet intervalle.

a) À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que pour tout entier $k \geq p$: $f(k+1) \leq F(k+1) - F(k) \leq f(k)$. 0,25 pt

b) En déduire que, pour tout entier $n > p$: $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} f(k) \leq F(n) - F(p) \leq \sum_{k=p}^{n-1} f(k)$. 0,25 pt

c) Énoncer le résultat analogue lorsque f est croissante. 0,25 pt

2. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Montrer que $2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n \leq 2\sqrt{n} - 1$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$.

0,5 pt

3. Montrer que $\dfrac{2}{3}\,n\sqrt{n} \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leq \frac{2}{3}\Big((n+1)\sqrt{n+1} - 1\Big)$, et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$. 0,25 pt

4. On pose $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k^2}$. Montrer que $\arctan(n+1) \leq w_n \leq 1 + \arctan n$, puis que la suite (w_n) converge vers une limite ℓ telle que $\dfrac{\pi}{2} \leq \ell \leq 1 + \dfrac{\pi}{2}$.

0,5 pt

5. On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$. En appliquant le lemme à $x \mapsto \dfrac{n}{n^2+x^2}$ sur $[0,n]$ (n fixé), montrer que

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2n} \leq u_n \leq \frac{\pi}{4}, \qquad \text{puis} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{4}.$$

0,5 pt

6. Montrer que, pour tout $n \geq 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$. En déduire que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)$ converge.

0,25 pt

Sous-total : 2,75 pts

Exercice 12 — Applications du lemme d'encadrement

★★★ Important — **2,75 pts**

On utilise le lemme de l'exercice 11 : encadrement (b) pour une fonction *décroissante*, encadrement (c) pour une fonction *croissante*.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$.

a) En appliquant le lemme à $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{n+x}}$ (n fixé), montrer que $2(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+1}) \leq B_n \leq 2(\sqrt{2n} - \sqrt{n})$.

0,75 pt

b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{B_n}{\sqrt{n}}$.

0,75 pt

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $C_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt[3]{k}$.

a) Vérifier que $x \mapsto \frac{3}{4}\, x \sqrt[3]{x}$ est une primitive de $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ sur $]0, +\infty[$.

0,5 pt

b) En appliquant le lemme sur $[1, +\infty[$ (cas croissant), encadrer C_n, puis calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{C_n}{n\sqrt[3]{n}}$.

0,75 pt

Sous-total : 2,75 pts

Problème 1 — Une primitive de $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$

2,75 pts

Objectif. Déterminer la primitive G de $g : x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$ qui s'annule en 0, l'étudier, puis l'encadrer au voisinage de 0.

Partie A — Calcul d'une primitive

1. Montrer que, pour tout réel x : $\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)' = \dfrac{2}{(1+x^2)^2} - \dfrac{1}{1+x^2}$.

0,25 pt

2. En déduire que $G : x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{1+x^2} + \arctan x\right)$ est la primitive de g sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

0,25 pt

Sous-total : 0,5 pt

Partie B — Étude de G

3. Étudier la parité de G, ses variations et ses limites en $\pm\infty$. **0,25 pt**

4. Calculer $G''(x)$; étudier la convexité de G et préciser le point d'inflexion et la tangente en ce point. **0,5 pt**

5. Calculer $G(1)$. **0,25 pt**

6. Montrer que G réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser, et calculer $(G^{-1})'\left(\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}\right)$. **0,5 pt**

Sous-total : 1,5 pt

Partie C — Un encadrement

7. Montrer que, pour tout $t \geq 0$: $(1+t)^2(1-2t) \leq 1$, puis que pour tout réel x : $1-2x^2 \leq \dfrac{1}{(1+x^2)^2} \leq 1$. **0,25 pt**

8. En déduire que, pour tout $x \geq 0$: $x - \dfrac{2}{3}x^3 \leq G(x) \leq x$, puis la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{G(x)}{x}$. **0,5 pt**

Sous-total : 0,75 pt

Problème 2 — Une famille de primitives de $\dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ — 9 pts

Objectif. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ et F_n la primitive de f_n sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 ; ainsi $\mathrm{F}_1 = \arctan$. On établit une relation entre F_{n+1} et F_n, on calcule la limite ℓ_n de F_n en $+\infty$, puis on étudie ℓ_n quand $n \to +\infty$.

Partie A — Une relation de récurrence

1. Montrer que F_n est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. **0,75 pt**

2. Montrer que, pour tout réel x : $\left(\dfrac{x}{(1+x^2)^n}\right)' = (1-2n)\, f_n(x) + 2n\, f_{n+1}(x)$. **0,5 pt**

3. En déduire que, pour tout réel x : $2n\,\mathrm{F}_{n+1}(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)\,\mathrm{F}_n(x)$. **1 pt**

4. Expliciter $\mathrm{F}_2(x)$ (on retrouvera la fonction G du problème 1) et $\mathrm{F}_3(x)$ à l'aide de x et de $\arctan x$. **0,75 pt**

Sous-total : 3 pts

Partie B — Limites en $+\infty$ et valeurs remarquables

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n admet en $+\infty$ une limite finie ℓ_n, et que $\ell_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n}\,\ell_n$. **1 pt**

6. En déduire que $\ell_n = \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{(2n-2)!}{4^{n-1}\big((n-1)!\big)^2}$ pour tout $n \geq 1$, puis donner ℓ_2 et ℓ_3. **0,75 pt**

7. Montrer que F_3 réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\dfrac{3\pi}{16}, \dfrac{3\pi}{16}\right[$, puis calculer $(\mathrm{F}_3^{-1})'\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{3\pi}{32}\right)$. **1,25 pt**

Sous-total : 3 pts

Partie C — Comportement de ℓ_n quand $n \to +\infty$

8. *Rappel (Bernoulli) :* pour tout $t \geq -1$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+t)^n \geq 1 + nt$. Montrer que, pour tout $x \geq 0$: $1 - nx^2 \leq f_n(x) \leq 1$. **0,75 pt**

9. En déduire que, pour tout $x \geq 0$: $x - \dfrac{n\,x^3}{3} \leq \mathrm{F}_n(x) \leq x$. **0,5 pt**

10. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a > 0$. Montrer que, pour tout $x \geq a$: $\mathrm{F}_n(x) \leq \mathrm{F}_n(a) + \dfrac{\arctan x - \arctan a}{(1+a^2)^{n-1}}$, puis que $\ell_n \leq a + \dfrac{\pi}{2\,(1+a^2)^{n-1}}$. **1 pt**

11. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n = 0$. **0,5 pt**

12. Montrer que $\ell_n \geq \dfrac{2}{3\sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. **0,25 pt**

Sous-total : 3 pts

Bonus (hors barème) — Un encadrement direct de ℓ_n

On pose $c_n = \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$; ainsi $c_0 = 1$ et $\ell_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}\, c_n$.

1. Montrer que $c_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2}\, c_n$, que la suite $(2n\, c_n^2)_{n\geq 1}$ est croissante et que la suite $\big((2n+1)\, c_n^2\big)_{n\geq 0}$ est décroissante.

2. En déduire que $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} \leq c_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ pour tout $n \geq 1$, puis un encadrement de ℓ_{n+1}.

Problème 3 — Calcul de π par des primitives successives — 2,5 pts

Objectif. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.
On montre que P_n approche arctan, puis on en déduit deux méthodes de calcul de π.

Partie A — Un lemme de comparaison

1. Soient $a > 0$ et u, v deux fonctions dérivables sur $[0,a]$ telles que $u(0) = v(0) = 0$ et, pour tout $x \in [0,a]$, $|u'(x)| \leq v'(x)$. Montrer que, pour tout $x \in [0,a]$: $|u(x)| \leq v(x)$. (*On étudiera $v - u$ et $v + u$.*) **0,5 pt**

Sous-total : 0,5 pt

Partie B — Approximation de arctan

2. Montrer que, pour tout réel t : $\dfrac{1}{1+t^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} + \dfrac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}$. **0,25 pt**

3. On pose $\varphi_n(x) = \arctan x - P_n(x)$. Calculer $\varphi_n'(x)$ et montrer que $|\varphi_n'(x)| \leq x^{2n+2}$. **0,5 pt**

4. En déduire que, pour tout $x \geq 0$: $|\arctan x - P_n(x)| \leq \dfrac{x^{2n+3}}{2n+3}$. **0,25 pt**

Sous-total : 1 pt

Partie C — Deux calculs de π

5. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ (*formule de Leibniz*). Combien de termes faut-il pour garantir une erreur inférieure à 10^{-3} sur $\dfrac{\pi}{4}$ par cette majoration ? **0,5 pt**

6. On admet la formule de Machin : $\dfrac{\pi}{4} = 4\arctan\dfrac{1}{5} - \arctan\dfrac{1}{239}$. Montrer que

$$\left|\pi - \left(16\,P_3\left(\tfrac{1}{5}\right) - 4\,P_0\left(\tfrac{1}{239}\right)\right)\right| \leq \frac{16}{9\cdot 5^9} + \frac{4}{3\cdot 239^3} < 1{,}1\times 10^{-6}.$$

Comparer l'efficacité des deux méthodes. **0,5 pt**

Sous-total : 1 pt