



Devoir surveillé n° 1

Limites, continuité et fonction Arctangente • Difficulté : 3 (★★★)

Auteur
Prof :R. Abed
Agrégré de Maths

Année
2025 / 2026

Durée
2 h

Barème
/20

NOM & Prénom :

Classe :

Note : / 20

Consignes aux candidats

Calculatrice non autorisée • téléphones et appareils électroniques interdits • la clarté, la rigueur et la présentation seront notées • tout résultat doit être **justifié** et **encadré** • les exercices sont indépendants • un résultat admis peut être réutilisé dans la suite.

Exercice 1 -- Équations polynomiales et dichotomie★★ Classique [4 pts]

A. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x - 13$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
2. À l'aide de la méthode de **dichotomie**, donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

B. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 + 3x - 4 = 0$ (E).

1. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

2. On pose $\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$.

Établir que α est solution de (E), puis en déduire que $\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} = 1$.

Sous-total : 4 pts

1 pt

1 pt

1 pt

1 pt

Exercice 2 -- Calcul de limites ★★★ SM [6 pts]

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{2025} + 1}{x^{17} + 1}$

0,5 pt

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{x+1} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}} \sqrt[20]{x}$

0,75 pt

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1 - nx}{x^2}$

0,5 pt

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-3x} - 1 + x}{x^2}$

0,5 pt

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 - x} - x - 1)$

0,5 pt

8. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x-1} \sqrt[3]{3x+2}}{x-2}$

0,75 pt

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 2 + \sqrt[3]{x^2 - x + 2})$

0,5 pt

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} \arctan(2x + 1) - \frac{\pi}{2} x)$

0,75 pt

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 1 + \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1})$

0,5 pt

10. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)$

0,75 pt

Sous-total : 6 pts

Exercice 3 -- Autour de la fonction Arctangente ★★★ SM [5 pts]

1. Une identité fondamentale.

a) Montrer que $\forall x > 0$, $\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

0,5 pt

b) Montrer que $\forall x < 0$, $\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

0,5 pt

2. Simplifier, pour $x \neq 0$, l'expression $g(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$.

1 pt

3. Formule de Machin.

a) Calculer $\tan\left(4 \arctan \frac{1}{5}\right)$.

0,5 pt

b) Soient x, y deux réels tels que $0 < x < y$. Montrer que $\arctan \frac{x}{y} + \arctan \frac{y-x}{y+x} = \frac{\pi}{4}$.

0,75 pt

c) En déduire que $4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$.

0,75 pt

4. Deux valeurs remarquables.

a) Montrer que $\forall x > 0$, $\arctan(\sqrt{1+x^2} - x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan x$.

0,5 pt

b) En déduire les valeurs exactes de $\tan \frac{\pi}{12}$ et $\tan \frac{\pi}{8}$.

0,5 pt

Sous-total : 5 pts

Problème -- Une fonction définie par morceaux[5 pts]**Objectif**

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On étudie la fonction f définie sur $I = [0; +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1 - \sqrt[n]{x}}{1 + \sqrt[n]{x}}\right), & x \in [0; 1], \\ \sqrt[3]{x^2 - x} - x + 1, & x > 1. \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue en 1. 0,5 pt
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1}$. 0,75 pt
3. Montrer que $(\forall x \in [0; 1]) (\exists! \alpha \in [0; \frac{\pi}{4}]) : (\tan \alpha)^n = x$. 0,5 pt
4. En déduire que $(\forall x \in [0; 1]) : f(x) = \frac{\pi}{4} - \arctan(\sqrt[n]{x})$. 0,5 pt
5. Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0; 1]$.
 - a) Montrer que h admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera. 0,5 pt
 - b) Déterminer $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$. 0,5 pt
6. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = -\frac{1}{2n}$. 0,75 pt
7. Montrer que $(\forall x < 0) : \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$, puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(2 \arctan(1 - \sqrt[n]{x}) + \pi)$. 1 pt

Sous-total : 5 pts

Fin de l'énoncé • Bon courage • Collection Maths Elites