

TVI • Théorème de la bijection • Racine  $n$ -ième — définitions, théorèmes, méthodes-types, pièges

## 1. Continuité : définitions et outils de base

## Définition — Continuité en un point

Soit  $f$  définie sur un intervalle ouvert contenant  $a$ . On dit que  $f$  est **continue en  $a$**  lorsque

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

$f$  est **continue à droite** (resp. à gauche) en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$  (resp.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ ).

Ainsi

$$f \text{ continue en } a \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

$f$  est **continue sur un intervalle  $I$**  si elle est continue en tout point de  $I$  (continuité à droite en la borne gauche, à gauche en la borne droite).

## Propriété — Opérations et fonctions usuelles

Si  $f$  et  $g$  sont continues en  $a$ , alors  $f + g$ ,  $\lambda f$ ,  $fg$ , et  $\frac{f}{g}$  (si  $g(a) \neq 0$ ) le sont aussi ;  $g \circ f$  est continue en  $a$  dès que  $f$  est continue en  $a$  et  $g$  continue en  $f(a)$ .

Sont continues sur tout leur ensemble de définition : les fonctions **polynômes, rationnelles**,  $x \mapsto \sqrt{x}$ ,  $x \mapsto |x|$ ,  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ , ainsi que  $\sin$ ,  $\cos$  (et  $\tan$  sur son domaine).

## Définition — Prolongement par continuité

Si  $f$  n'est pas définie en  $a$  mais admet une limite finie  $\ell$  en  $a$ , la fonction

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ \ell & x = a \end{cases}$$

est continue en  $a$  : c'est le **prolongement par continuité** de  $f$  en  $a$ .

## Rappel — Encadrement (gendarmes) et partie entière

Si  $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$  au voisinage de  $a$  et  $\lim u = \lim v = \ell$ , alors  $\lim f = \ell$ .

Rappel utile : pour tout réel  $t$ ,  $t - 1 < E(t) \leq t$ , donc  $E(t) \leq t < E(t) + 1$ .

## 2. Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

### Théorème — Valeurs intermédiaires

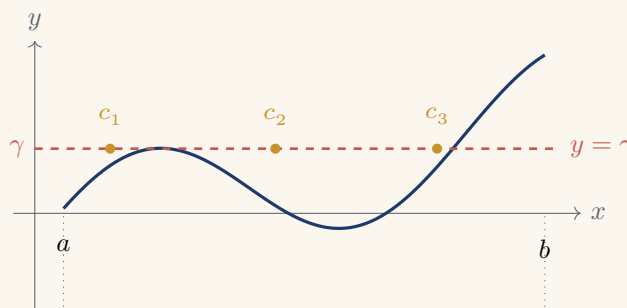
Si  $f$  est **continue** sur  $[a, b]$ , alors pour tout réel  $\gamma$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe (au moins) un réel  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \gamma$ .

### Propriété — Corollaire — existence d'une racine

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et si  $f(a) \cdot f(b) < 0$  (valeurs de signes contraires), alors l'équation  $f(x) = 0$  admet **au moins une solution** dans  $]a, b[$ .

### Propriété — Image d'un intervalle

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. En particulier, l'image d'un segment  $[a, b]$  par une fonction continue est un segment  $[m, M]$  (où  $m$  et  $M$  sont le minimum et le maximum de  $f$  sur  $[a, b]$ ).



### Remarque

Le TVI garantit l'**existence** d'un antécédent, pas son **unicité** : ici  $f(x) = \gamma$  possède trois solutions. Pour l'unicité, il faut une hypothèse supplémentaire (stricte monotonie).

## 3. Théorème de la bijection et fonction réciproque

### Théorème — Bijection

Si  $f$  est **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle  $I$ , alors  $f$  réalise une **bijection** de  $I$  sur l'intervalle  $J = f(I)$ . Par suite, pour tout  $\gamma \in J$ , l'équation  $f(x) = \gamma$  admet une **unique** solution dans  $I$ .

### Propriété — Détermination de $J = f(I)$

$f$  continue et strictement monotone sur  $I$ ;  $J = f(I)$  se lit sur le tableau de variations, avec les *limites aux bornes*. Exemples ( $f$  strictement croissante) :

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)], \quad f(]a, b[) = \left] \lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f \right[, \quad f([a, +\infty[) = \left[ f(a), \lim_{+\infty} f \right[.$$

(Bornes inversées si  $f$  est strictement décroissante.)

### Propriété — Fonction réciproque $f^{-1}$

Si  $f : I \rightarrow J$  est bijective, continue et strictement monotone, alors  $f^{-1} : J \rightarrow I$  est :

- continue sur  $J$ , de **même sens de variation** que  $f$  ;
- et  $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$  (pour  $x \in I, y \in J$ ).

Les courbes de  $f$  et de  $f^{-1}$  sont **symétriques par rapport à la droite**  $y = x$ .

### Propriété — Dérivée de la réciproque

Si de plus  $f$  est dérivable en  $x_0 = f^{-1}(y_0)$  avec  $f'(x_0) \neq 0$ , alors  $f^{-1}$  est dérivable en  $y_0$  et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

## 4. Racine $n$ -ième et puissances rationnelles

### Définition — Racine $n$ -ième

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $x \mapsto x^n$  est continue et strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ , donc réalise une bijection de  $[0, +\infty[$  sur  $[0, +\infty[$ . Sa réciproque est la fonction **racine  $n$ -ième** :

$$\sqrt[n]{\cdot} : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[, \quad y = \sqrt[n]{x} \iff (y \geq 0 \text{ et } y^n = x).$$

### Propriété — Règles de calcul (pour $a, b \geq 0$ )

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}, \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b > 0), \quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$$

### Définition — Puissance rationnelle

Pour  $a > 0$  et  $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  ( $q \in \mathbb{N}^*$ ), on pose  $a^r = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$ . Les règles usuelles des puissances  $a^r a^s = a^{r+s}$ ,  $(a^r)^s = a^{rs}$ ,  $(ab)^r = a^r b^r$  restent valables.

## 5. Méthodes-types

### ■ 1. Étudier la continuité / prolonger par continuité

#### Méthode

1. Sur chaque intervalle où  $f$  est donnée par une expression usuelle, conclure par les opérations. 2. Aux points de raccord  $a$ , calculer  $\lim_{x \rightarrow a^-} f$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} f$ . 3.  $f$  continue en  $a \iff$  ces deux limites valent  $f(a)$ . 4. Si  $f$  non définie en  $a$  mais limite finie  $\ell$  : le prolongement pose  $f(a) = \ell$ .

### Exemple

$f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$  pour  $x \neq 1$ . On multiplie par la quantité conjuguée :  $f(x) = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{4}$ . Le prolongement continu est obtenu en posant  $f(1) = \frac{1}{4}$ .

## ■ 2. Montrer qu'une équation admet au moins une solution

### Méthode

Écrire l'équation sous la forme  $f(x) = 0$  (ou  $f(x) = \gamma$ ). Vérifier que  $f$  est **continue** sur  $[a, b]$ , puis que  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de **signes contraires** (ou que  $\gamma$  est entre  $f(a)$  et  $f(b)$ ). Conclure par le TVI.

## ■ 3. Montrer l'unicité de la solution

### Méthode

Après l'existence : établir que  $f$  est **strictement monotone** sur  $I$  (étude du signe de  $f'$ , ou étude directe de  $f(x_1) - f(x_2)$ ). Continue + strictement monotone  $\Rightarrow$  **bijection**  $\Rightarrow$  solution **unique**.

### Astuce

Rédaction gagnante : «  $f$  est continue et strictement croissante sur  $I$ , donc réalise une bijection de  $I$  sur  $f(I)$  ; comme  $0 \in f(I)$ , l'équation  $f(x) = 0$  possède une unique solution  $\alpha \in I$ . »

## ■ 4. Encadrer / approcher une solution par dichotomie

### Méthode

Partant de  $[a, b]$  avec  $f(a)f(b) < 0$ , calculer  $f(\frac{a+b}{2})$  : la racine est dans la moitié aux bornes de signes contraires. Répéter jusqu'à l'amplitude voulue.

### Exemple

$f(x) = x^3 + 3x - 5$  :  $f(1) = -1 < 0$ ,  $f(2) = 9 > 0 \Rightarrow \alpha \in ]1, 2[$ . Puis  $f(1.2) = 0.328 > 0 \Rightarrow \alpha \in ]1, 1.2[$ , et  $f(1.1) = -0.369 < 0 \Rightarrow \alpha \in ]1.1, 1.2[$ .

## ■ 5. Bijection, image d'un intervalle et réciproque

### Méthode

1. Justifier continuité et stricte monotonie sur  $I$ . 2. Dresser le tableau de variations avec les limites aux bornes pour lire  $J = f(I)$ . 3. Conclure que  $f : I \rightarrow J$  est bijective. 4. Décrire  $f^{-1}$  (domaine  $J$ , sens de variation, éventuellement  $(f^{-1})'$ ).

## ■ 6. Suite récurrente et continuité (point fixe)

### Méthode

Pour  $u_{n+1} = g(u_n)$  avec  $g$  continue : si  $(u_n)$  **converge** vers  $\ell$  et si  $\ell$  appartient au domaine de  $g$ , alors par continuité  $\ell = g(\ell)$ . On résout cette équation pour identifier la limite (après avoir prouvé la convergence).

## 6. Pièges et erreurs fréquentes

### Piège

- **Oublier la continuité** avant d'appliquer le TVI : l'hypothèse est *indispensable* (une fonction qui « saute » peut éviter la valeur  $\gamma$ ).
- **Confondre existence et unicité** : le TVI seul ne donne *jamais* l'unicité. L'unicité vient de la **stricte** monotonie.
- **Monotonie large** : « croissante » ne suffit pas ; il faut **strictement** monotone pour la bijection.
- **Image d'un intervalle** :  $f(I)$  n'est pas  $[f(a), f(b)]$  en général — il faut le *sens de variation* et les *limites aux bornes* (surtout si une borne est ouverte ou infinie).
- **Racine  $n$ -ième** :  $\sqrt[n]{x}$  n'est définie (au programme) que pour  $x \geq 0$  ;  $(\sqrt[n]{x})^n = x$  mais attention aux signes.
- **Limite au point de raccord** : vérifier les **deux** limites latérales, pas une seule.