



Maths Elites

Excellence en Mathématiques | Classes Préparatoires

Prof. R. Abed — Agrégé de Mathématiques

PROBLÈMES • MÉTHODES • EXERCICES • CORRIGÉS

Algèbre linéaire Problèmes & Exercices

Programme de Sup — MPSI

Endomorphismes | Noyaux & stabilité | Trace | Matrices

Quatre problèmes de synthèse et un recueil d'exercices classiques, avec indications et corrigés



Noyaux



Stabilité



Trace



Matrices

4 problèmes | **12** exercices classiques | Indications · Méthodes · Corrigés

Préparation Concours & CPGE — Vers l'excellence en mathématiques

Sommaire

Table des matières

Sommaire	1
Avant-propos	1
PREMIÈRE PARTIE — Problèmes d’algèbre linéaire	2
Problème 1. Décomposition des noyaux	3
Problème 2. Endomorphismes vérifiant $f \circ f = -\text{id}_E$	3
Problème 3. Endomorphismes cycliques	4
Partie I — Commutant d’un endomorphisme cyclique	4
Partie II — Deux opérateurs cycliques sur $\mathbb{K}_n[X]$	4
Partie III — Prolongement à $\mathbb{K}[X]$	5
Problème 4. Trace d’une matrice	5
Partie I — Trace, forme linéaire et produit scalaire	5
Partie II — Trace et formes linéaires	6
Partie III — Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $\text{GL}_n(\mathbb{K})$	6
Partie IV — Caractérisation de la trace	6
Partie V — Matrices de trace nulle	7
DEUXIÈME PARTIE — Exercices classiques MPSI	8
A. Projecteurs, symétries, sommes directes	9
B. Rang, noyau, image	9
C. Commutant, polynômes, nilpotence	10

Avant-propos

Ce fascicule rassemble des **problèmes de synthèse** et des **exercices classiques** d’algèbre linéaire au programme de la classe de **MPSI**. Les quatre problèmes centraux (décomposition des noyaux, endomorphismes vérifiant $f \circ f = -\text{id}$, endomorphismes cycliques, trace d’une matrice) constituent des fils conducteurs riches, qui font travailler en profondeur les notions de sous-espaces stables, de polynômes d’endomorphismes, de dualité et de rang.

Ils sont complétés par un recueil d’**exercices classiques et incontournables**, chacun accompagné d’une *indication* ou d’un *corrigé*. Le but est double : consolider les automatismes du cours et préparer le passage vers les problèmes de concours.

À retenir

Chaque énoncé est signalé par un niveau de difficulté (de ★☆☆☆ à ★★★★★) et une étiquette d’origine. Les encadrés **Méthode**, **Astuce** et **Piège à éviter** condensent les réflexes attendus le jour du concours.



PREMIÈRE PARTIE

Problèmes d'algèbre linéaire

*Décomposition des noyaux, structures complexes réelles,
endomorphismes cycliques et trace d'une matrice —
quatre problèmes de synthèse au programme de Sup.*

Problème 1. Décomposition des noyaux

Rappel de cours

Pour $P = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p \in \mathbb{K}[X]$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $P(f) = a_0 \text{id}_E + a_1f + \dots + a_pf^p$, avec $f^0 = \text{id}_E$ et $f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$. Le **lemme de décomposition des noyaux** affirme que si $P = P_1 \dots P_r$ avec les P_i deux à deux premiers entre eux, alors $\text{Ker}(P(f)) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(P_i(f))$.

Exercice 1 — Décomposition des noyaux

★★★★ Fondamental

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

- Montrer que $(P + Q)(f) = P(f) + Q(f)$ et $(P \cdot Q)(f) = P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$.
- Montrer que si P divise Q , alors

$$\text{Ker}(P(f)) \subset \text{Ker}(Q(f)) \quad \text{et} \quad \text{Im}(Q(f)) \subset \text{Im}(P(f)).$$

- Montrer que si $D = \text{pgcd}(P, Q)$, alors

$$\text{Ker}(D(f)) = \text{Ker}(P(f)) \cap \text{Ker}(Q(f)) \quad \text{et} \quad \text{Im}(D(f)) = \text{Im}(P(f)) + \text{Im}(Q(f)).$$

- Montrer que si $\text{pgcd}(P, Q) = 1$ et $(P \cdot Q)(f) = 0$, alors $E = \text{Ker}(P(f)) \oplus \text{Ker}(Q(f))$.

Applications.

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 + 3f + 2\text{id}_E = 0$. Montrer qu'il existe deux sous-espaces supplémentaires F et G de E tels que $f|_F = -\text{id}_F$ et $f|_G = -2\text{id}_G$.
- Projecteur.** Soit p un projecteur de E . Montrer que $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Ker}(p - \text{id}_E)$.
- Symétrie.** Soit s une symétrie de E . Montrer que $E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$.

Astuce — Le point-clé de Bézout

Pour la question 4, comme $\text{pgcd}(P, Q) = 1$, le théorème de Bézout fournit $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $UP + VQ = 1$, d'où $U(f) \circ P(f) + V(f) \circ Q(f) = \text{id}_E$. Cette identité donne à la fois l'analyse (décomposition d'un vecteur) et la directité de la somme.

Problème 2. Endomorphismes vérifiant $f \circ f = -\text{id}_E$

Exercice 2 — Structure complexe réelle

★★★★ Classique

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. On suppose qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = -\text{id}_E$.

- Soit $u \neq 0$. Démontrer que la famille $(u, f(u))$ est libre.
- On note $F_u = \text{Vect}(u, f(u))$. Démontrer que F_u est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant u et stable par f .
- Soit $v \in F_u$ tel que $v \neq 0$. Démontrer que $F_v = F_u$.
- Soit G un sous-espace de E stable par f et ne contenant pas u . Démontrer que $G \cap F_u = \{0\}$ et que $G \oplus F_u$ est stable par f .

5. En déduire qu'il existe des vecteurs $u_1, \dots, u_n$ tels que $E = F_{u_1} \oplus \dots \oplus F_{u_n}$. Que peut-on dire de $\dim E$?
6. **Réciproque.** Soit $\dim E = 2n$ et $(e_1, e'_1, \dots, e_n, e'_n)$ une base de E . Construire $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = -\text{id}_E$.
7. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ g = -\text{id}_E$. Démontrer qu'il existe $h \in \text{GL}(E)$ tel que $g = h \circ f \circ h^{-1}$.

Remarque

Un tel f munit E d'une structure de $\mathbb{C}$ -espace vectoriel en posant $(a + ib) \cdot x = ax + bf(x)$. La dimension réelle est alors nécessairement **paire**, égale à $2 \dim_{\mathbb{C}} E$. C'est la version «géométrique» de l'impossibilité de $X^2 + 1$ d'avoir une racine réelle.

Exercice 3 — Un cousin : $f^2 + f + \text{id}_E = 0$

★★★★ Oral

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. On suppose qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 + f + \text{id}_E = 0$. Montrer que $\dim E$ est **paire**.

Astuce — Regrouper par plans stables

Le polynôme $X^2 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{R}$. Pour $u \neq 0$, la famille $(u, f(u))$ est libre et $\text{Vect}(u, f(u))$ est un plan stable ; on décompose E en somme directe de tels plans, exactement comme au problème précédent.

Problème 3. Endomorphismes cycliques

Définition — Endomorphisme cyclique

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- f est dit **cyclique** s'il existe $a \in E$ tel que la famille $(f^k(a))_{k \in \mathbb{N}}$ engendre E ; a est alors dit **associé** à f .
- Le **commutant** de f est $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) / f \circ g = g \circ f\}$.
- On pose $\mathcal{P}(f) = \{a_0 \text{id}_E + a_1 f + \dots + a_k f^k / k \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}[f]$.

1. Partie I — Commutant d'un endomorphisme cyclique

1. Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
- 2.a. Justifier l'existence d'un entier p maximal tel que $\mathcal{F}_p = (a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ soit libre.
- 2.b. On suppose f cyclique de vecteur associé a . Montrer que $\mathcal{F}_p$ est une base de E . Que vaut p ?
2. Soit $g \in \mathcal{C}(f)$. Montrer qu'il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que $g = \alpha_0 \text{id}_E + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$.
3. En déduire que $\mathcal{C}(f) = \mathcal{P}(f)$.
4. Montrer que $(\text{id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}(f)$.

2. Partie II — Deux opérateurs cycliques sur $\mathbb{K}_n[X]$

Soit $a \in \mathbb{K}^*$. On considère les deux endomorphismes de $\mathbb{K}_n[X]$:

$$\Delta : P \mapsto P(X + a) - P(X), \quad D : P \mapsto P'.$$

- 1.a. Montrer que si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ n'est pas constant, alors $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.
- 1.b. En déduire que Δ est cyclique.
- 1.c. Montrer que $D \in \mathcal{P}(\Delta)$.
 2. Montrer que D est cyclique.
 3. Montrer que $\mathcal{C}(\Delta) = \mathcal{P}(D)$.

3. Partie III — Prolongement à $\mathbb{K}[X]$

On considère Δ et D prolongés à $\mathbb{K}[X]$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}(\Delta)$.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Démontrer que $P \in \mathbb{K}_n[X] \iff \Delta^{n+1}(P) = 0$.
2. En déduire que les sous-espaces $\mathbb{K}_n[X]$ sont stables par φ .
3. Démontrer que $\forall P \in \mathbb{K}[X], \varphi(P') = (\varphi(P))'$.
4. Conclure quant à φ .
5. A-t-on $\mathcal{P}(\Delta) = \mathcal{P}(D)$? On pourra considérer le polynôme

$$U_n(X) = \frac{X(X-a)(X-2a)\cdots(X-(n-1)a)}{n! a^n}.$$

Problème 4. Trace d'une matrice

Rappel de cours

Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la **trace** est $\text{tr}(A) = \sum_{k=1}^n a_{k,k}$. On rappelle les deux propriétés fondamentales : tr est *linéaire* et $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$; par conséquent, deux matrices semblables ont même trace. On note $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

4. Partie I — Trace, forme linéaire et produit scalaire

Soit $n \geq 2$; $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Deux matrices M, M' sont *semblables* s'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $M' = P^{-1}MP$.

1. Montrer que tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. En déduire que $\text{tr}(P^{-1}MP) = \text{tr}(M)$ pour $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$.
3. On prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On pose $\varphi(A, B) = \text{tr}({}^tA B)$. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 4.a. **Application 1.** Soient $A \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -4 & y \end{pmatrix}, \quad x > y.$$

Déterminer x et y . En considérant ABA , trouver A et B .

4.b. **Application 2.** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ et M sa matrice dans une base $\mathcal{B}$. Montrer que $\text{tr}(M)$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$: on définit alors $\text{tr}(f)$.

4.c. **Application 3.** Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$. Deux projecteurs p, q étant donnés, $p + \sqrt{2}q$ est-il un projecteur ?

Astuce — Trace d'un projecteur

Dans une base adaptée à $\mathbb{R}^n = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$, la matrice de p est diagonale, formée de $\text{rg}(p)$ coefficients 1 et de $n - \text{rg}(p)$ coefficients 0. D'où $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$: la trace d'un projecteur est toujours un entier, égal à son rang.

5. Partie II — Trace et formes linéaires

On rappelle $E_{i,j} = (\delta_{i,k} \delta_{l,j})_{k,l}$, où δ est le symbole de Kronecker.

- Pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, que vaut $\text{tr}(E_{i,j})$?
- Pour $(i, j, k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$, établir $E_{i,j} E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$.
- Pour $A = (a_{k,l}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, calculer $\text{tr}(A E_{i,j})$.
- Soit ψ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \psi(M) = \text{tr}(AM)$.

6. Partie III — Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $\text{GL}_n(\mathbb{K})$

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle telle que $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / \text{tr}(AM) = 0\}$.

Pour $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $J_r = \sum_{k=1}^r E_{k,k}$ et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{matrice du cycle}).$$

- Montrer que $J \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$.
- Calculer $\text{tr}(J_r J)$.
- En déduire $\text{tr}((U J_r V)(V^{-1} J U^{-1}))$ pour $(U, V) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})^2$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang r . Montrer que A est équivalente à J_r : il existe $U, V \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = U J_r V$.
- Conclure : tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

7. Partie IV — Caractérisation de la trace

Soit ψ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \psi(MN) = \psi(NM).$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda \cdot \text{tr}$.

Astuce — Tester sur les $E_{i,j}$

Appliquer l'hypothèse à $M = E_{i,k}$ et $N = E_{k,j}$ montre que $\psi(E_{i,j}) = 0$ pour $i \neq j$ et que $\psi(E_{i,i})$ ne dépend pas de i . La forme ψ est donc proportionnelle à la trace : $\lambda = \psi(E_{1,1})$.

8. Partie V — Matrices de trace nulle

On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices diagonales et Ω_n l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à diagonale nulle.

1. Montrer que $\mathcal{D}_n$ et Ω_n sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- 2.a. **Lemme.** Soit $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, la famille $(x, h(x))$ soit liée. Montrer que h est une homothétie.
- 2.b. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, f l'endomorphisme canoniquement associé. Si f n'est pas une homothétie, montrer qu'il existe un vecteur x tel que $(x, f(x))$ soit libre, puis que M est semblable à une matrice dont la première colonne est ${}^t(0, 1, 0, \dots, 0)$.
- 2.c. En déduire que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice à diagonale nulle.
3. Soit $D = \text{diag}(1, 2, \dots, n)$ et $\Psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $M \mapsto DM - MD$.
- 3.a. Montrer que Ψ est linéaire et calculer $\Psi(E_{i,j})$.
- 3.b. Montrer que $\text{Im}(\Psi) \supset \Omega_n$ et $\text{Ker}(\Psi) \supset \mathcal{D}_n$.
- 3.c. En déduire $\text{Im}(\Psi) = \Omega_n$ et $\text{Ker}(\Psi) = \mathcal{D}_n$.
4. Montrer que toute $P \in \Omega_n$ s'écrit $P = AB - BA$. Étendre le résultat aux matrices de trace nulle et conclure.

À retenir

Le résultat final est un théorème classique : *une matrice est un commutateur $AB - BA$ si et seulement si sa trace est nulle*. La condition $\text{tr} = 0$ est évidemment nécessaire puisque $\text{tr}(AB - BA) = 0$; toute la difficulté est la réciproque, obtenue via la réduction à diagonale nulle.



DEUXIÈME PARTIE

Exercices classiques MPSI

*Projecteurs et symétries, rang et formule du rang, commutant
et polynômes d'endomorphismes, nilpotence — douze
exercices incontournables, avec indications et corrigés.*

A. Projecteurs, symétries, sommes directes

Exercice 1 — Somme de deux projecteurs

★★☆☆ Classique

Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E (avec $1 + 1 \neq 0$ dans $\mathbb{K}$).

- Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
- Dans ce cas, montrer que $\text{Im}(p + q) = \text{Im } p \oplus \text{Im } q$ et $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.

Correction

1. $(p + q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2 = p + q + (pq + qp)$. Donc $p + q$ est un projecteur ssi $pq + qp = 0$. Supposons cette égalité. En multipliant à gauche par p : $pq + pqp = 0$; à droite par p : $pqp + qp = 0$. Par différence $pq - qp = 0$, donc $pq = qp$; combiné à $pq + qp = 0$ et $1 + 1 \neq 0$, on obtient $pq = qp = 0$. La réciproque est immédiate.

2. Comme $pq = qp = 0$: pour $x \in \text{Im } p$, $q(x) = q(p(x)) = 0$ donc $\text{Im } p \subset \text{Ker } q$, et de même $\text{Im } q \subset \text{Ker } p$; d'où $\text{Im } p \cap \text{Im } q = \{0\}$. Enfin $(p + q)(x) = p(x) + q(x) \in \text{Im } p + \text{Im } q$ et $(p + q)|_{\text{Im } p} = \text{id}$, $(p + q)|_{\text{Im } q} = \text{id}$, ce qui donne $\text{Im}(p + q) = \text{Im } p \oplus \text{Im } q$. Pour le noyau, $x \in \text{Ker}(p + q)$ donne $p(x) = -q(x)$; en appliquant p : $p(x) = -pq(x) = 0$, puis $q(x) = 0$; la réciproque est claire.

Exercice 2 — Caractérisation des symétries

★★☆☆ Classique

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que s est une symétrie (c.-à-d. $s^2 = \text{id}_E$) si et seulement si $p = \frac{1}{2}(\text{id}_E + s)$ est un projecteur, et exprimer alors $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$ à l'aide de p .

Astuce — Le pont projecteur $\leftrightarrow$ symétrie

$p^2 = p \iff s^2 = \text{id}_E$, et l'on a $\text{Im } p = \text{Ker}(s - \text{id}_E)$, $\text{Ker } p = \text{Ker}(s + \text{id}_E)$. Toute symétrie s'écrit $s = 2p - \text{id}_E$: symétries et projecteurs sont « la même chose » à un changement affine près. C'est le réflexe pour ramener une symétrie à un projecteur.

Exercice 3 — Une somme directe de noyaux

★★★★ Centrale

Soit E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f$. Montrer que

$$E = \text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f + \text{id}_E).$$

Correction

On a $f^3 - f = f(f - \text{id}_E)(f + \text{id}_E) = 0$, et les polynômes X , $X - 1$, $X + 1$ sont deux à deux premiers entre eux. Le lemme de décomposition des noyaux (Problème 1) donne directement la somme directe annoncée, puisque $\text{Ker}(f(f - \text{id}_E)(f + \text{id}_E)) = \text{Ker}(0_{\mathcal{L}(E)}) = E$. Concrètement, $\frac{-1}{1} \cdot$: pour tout x , $x = (\text{id} - f^2)x + \frac{f^2 + f}{2}x + \frac{f^2 - f}{2}x$, les trois termes appartenant respectivement aux trois noyaux.

B. Rang, noyau, image

Exercice 4 — Sous-additivité du rang

★★☆☆ Classique

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E, F de dimension finie. Montrer que

$$|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leq \operatorname{rg}(u + v) \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v.$$

Correction

Pour la majoration de droite : $\operatorname{Im}(u + v) \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$, donc $\operatorname{rg}(u + v) \leq \dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$. Pour la minoration, on applique ce résultat à $u = (u + v) + (-v)$: $\operatorname{rg} u \leq \operatorname{rg}(u + v) + \operatorname{rg} v$, d'où $\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v \leq \operatorname{rg}(u + v)$; par symétrie en échangeant les rôles, on obtient $|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leq \operatorname{rg}(u + v)$.

Exercice 5 — Rang d'une composée (Sylvester)

★★★★ Mines-Ponts

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$ avec E, F, G de dimension finie.

1. Montrer que $\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \min(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v)$.
2. Établir l'inégalité de Sylvester : $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v - \dim F \leq \operatorname{rg}(v \circ u)$.

Astuce — Restreindre v à l'image de u

Poser $w = v|_{\operatorname{Im} u} : \operatorname{Im} u \rightarrow G$. Alors $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im} w$, donc $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} w = \operatorname{rg} u - \dim(\operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Im} u)$ par la formule du rang appliquée à w . On conclut avec $\dim(\operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Im} u) \leq \dim \operatorname{Ker} v = \dim F - \operatorname{rg} v$.

Exercice 6 — Noyau et image en somme directe

★★★★ CCINP

Soit E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f \iff \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2.$$

Donner un exemple où la somme $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$ n'est pas directe.

Correction

La formule du rang donne toujours $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$; la somme est donc directe ssi $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$. Or si $y \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, alors $y = f(x)$ et $f(y) = f^2(x) = 0$, donc $x \in \operatorname{Ker} f^2$. Ainsi $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\} \iff \operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f \iff \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ (l'inclusion $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$ étant toujours vraie).

Contre-exemple. Sur $\mathbb{K}^2$, $f(x, y) = (y, 0)$ vérifie $f^2 = 0$, donc $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_1)$ et la somme n'est pas directe.

C. Commutant, polynômes, nilpotence

Exercice 7 — Centre de $\mathcal{L}(E)$

★★★★ Classique

Soit E de dimension finie ≥ 1 . Montrer que les endomorphismes $f \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent avec *tout* endomorphisme de E sont exactement les homothéties $\lambda \operatorname{id}_E$.

Correction

Une homothétie commute clairement avec tout. Réciproquement, soit f commutant avec tout $g \in \mathcal{L}(E)$. Fixons $x \neq 0$; s'il existait x tel que $(x, f(x))$ soit libre, on compléterait en une base et on construirait g tel que $g(x) = x, g(f(x)) = 0$, contredisant $f(g(x)) = g(f(x))$. Donc pour tout x , $(x, f(x))$ est liée : $f(x) = \lambda_x x$. Un argument classique (prendre x, y et $x + y$) montre que λ_x ne dépend pas de x , d'où $f = \lambda \text{id}_E$.

Exercice 8 — Commutant d'une matrice diagonale

★★★★☆ Classique

Soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à coefficients diagonaux deux à deux distincts. Déterminer le commutant $\mathcal{C}(D) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / MD = DM\}$ et sa dimension.

Correction

En notant $M = (m_{i,j})$, la relation $MD = DM$ s'écrit $\lambda_j m_{i,j} = \lambda_i m_{i,j}$ pour tous i, j , soit $(\lambda_i - \lambda_j) m_{i,j} = 0$. Comme les λ_i sont distincts, $m_{i,j} = 0$ dès que $i \neq j$. Le commutant est donc l'ensemble des matrices **diagonales** : $\mathcal{C}(D) = \mathcal{D}_n$, de dimension n .

Exercice 9 — Endomorphisme nilpotent

★★★★☆ Centrale

Soit E de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, c.-à-d. il existe p tel que $f^p = 0$.

1. Montrer que si $f \neq 0$, la suite $(\text{Ker } f^k)_k$ est strictement croissante tant qu'elle n'est pas stationnaire.
2. En déduire que $f^n = 0$.
3. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E si et seulement si $f^{n-1} \neq 0$.

Astuce — Suite d'inclusions strictes

Tant que $\text{Ker } f^k \subsetneq \text{Ker } f^{k+1}$, la dimension croît d'au moins 1; comme elle est majorée par n , l'indice de nilpotence est $\leq n$, d'où $f^n = 0$. C'est l'archétype de l'argument « suite strictement croissante bornée de sous-espaces ».

Exercice 10 — Trace d'un endomorphisme nilpotent

★★★★☆ Oral

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, E de dimension finie. Montrer que $\text{tr}(f) = 0$, et plus généralement $\text{tr}(f^k) = 0$ pour tout $k \geq 1$.

Astuce — Trigonaliser au-dessus

Dans une base adaptée au drapeau $\{0\} \subset \text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2 \subset \dots$, la matrice de f est **triangulaire supérieure stricte** : sa diagonale est nulle, donc $\text{tr}(f) = 0$. La puissance f^k reste nilpotente, d'où $\text{tr}(f^k) = 0$.

Exercice 11 — Puissances et suite de Fibonacci

★★★★☆ Classique

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et l'on considère la suite de Fibonacci $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

1. Montrer que $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ pour tout $n \geq 1$.
2. En déduire l'identité $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Correction

1. Récurrence : vrai pour $n = 1$, et $A^{n+1} = A \cdot A^n$ donne, par la règle de récurrence de Fibonacci, la matrice annoncée au rang $n + 1$.
2. En prenant le déterminant : $\det(A^n) = (\det A)^n = (-1)^n$, tandis que $\det A^n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$. D'où l'identité de Cassini.

Exercice 12 — Inversibilité de $\text{id} - f$ pour f nilpotent

★★☆☆ Classique

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p (c.-à-d. $f^p = 0$, $f^{p-1} \neq 0$).

1. Montrer que $\text{id}_E - f$ est inversible et expliciter son inverse.
2. Plus généralement, montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\lambda \text{id}_E - f$ est inversible.

Correction

1. Comme $f^p = 0$, la somme télescopique $(\text{id}_E - f)(\text{id}_E + f + \dots + f^{p-1}) = \text{id}_E - f^p = \text{id}_E$, et de même dans l'autre ordre (car f commute avec ses puissances). Donc $\text{id}_E - f$ est inversible d'inverse $\sum_{k=0}^{p-1} f^k$.
2. On écrit $\lambda \text{id}_E - f = \lambda(\text{id}_E - \frac{1}{\lambda}f)$, et $\frac{1}{\lambda}f$ est encore nilpotent : on applique la question 1. D'où $(\lambda \text{id}_E - f)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda^{-(k+1)} f^k$.

Fin du fascicule — Maths Elites

« L'algèbre linéaire est l'art de rendre linéaire ce qui ne l'était pas. »