



CHAPITRE D'ANALYSE

Continuité et dérivabilité des fonctions définies par une intégrale à paramètre

$$g(x) = \int_a^b f(x, t) \, dt$$

Au programme : continuité sous le signe intégral (théorème de continuité, domination locale), dérivation sous le signe intégral (théorème de Leibniz), **démonstrations complètes** via l'inégalité des accroissements finis et les formules de Taylor, extensions, exemples de référence (fonction Γ d'Euler, fonction B d'Euler, intégrales de Dirichlet, de Fresnel et de Gauss), exercices corrigés, et une annexe d'initiation niveau Terminale SM.

Niveau : Terminale SM (approfondissement) — MPSI — MP

Table des matières

Introduction — Position du problème	2
1 Continuité d’une fonction définie par une intégrale sur un segment	3
1.1 Cadre et hypothèses	3
1.2 Le théorème de continuité	3
1.3 Exemples instructifs	4
2 Dérivabilité d’une fonction définie par une intégrale sur un segment	6
2.1 Le théorème de Leibniz	6
2.2 Méthode de rédaction	7
2.3 Exemples instructifs	7
3 Démonstrations complètes (via l’inégalité des accroissements finis et les formules de Taylor)	9
3.1 Rappels des outils élémentaires	9
3.2 Démonstration du théorème de continuité (théorème 1.2)	10
3.3 Démonstration du théorème de Leibniz (théorème 2.2)	11
4 Extension : intégrales sur un intervalle quelconque	14
5 Synthèse : fiche méthode et pièges classiques	17
5.1 Tableau récapitulatif	17
5.2 Les six réflexes à avoir systématiquement	17
6 Exercices corrigés	18
7 Annexe — Version allégée pour la Terminale SM	25
7.1 Le cas le plus simple : intégrande polynomial en x	25
7.2 Continuité par encadrement (esprit « gendarmes »)	26
7.3 Dérivabilité par l’inégalité des accroissements finis (esprit Terminale)	27
7.4 Ce que l’on peut (et ne peut pas) exiger en Terminale	28

Introduction — Position du problème

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, J un intervalle (ou un segment) de $\mathbb{R}$, et

$$f : I \times J \longrightarrow \mathbb{K} \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$$

une fonction de deux variables. Pour $a, b \in J$ fixés, on définit la fonction

$$g(x) = \int_a^b f(x, t) \, dt, \quad x \in I$$

(on suppose bien sûr que, pour chaque $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur le segment d'extrémités a et b , par exemple continue).

Le problème central de ce chapitre : la variable x figure à l'intérieur de l'intégrale, et l'on souhaite transporter sur g les propriétés de régularité de f par rapport à x : si $x \mapsto f(x, t)$ est continue (resp. dérivable) pour tout t , la fonction g est-elle continue (resp. dérivable) sur I ? Et si oui, comment calculer g' ?

On rencontre ce type de fonctions dans de très nombreux contextes : transformée de Laplace, fonction Γ d'Euler, intégrales de Fresnel, de Dirichlet, de Gauss, fonctions caractéristiques en probabilités, résolution d'équations différentielles, etc. La difficulté est qu'**on ne peut pas, en général, intervertir librement limite (en x) et intégrale (en t)** : c'est précisément l'objet des théorèmes qui suivent que de donner des conditions suffisantes (et incontournables en pratique) pour le faire *rigoureusement*.

! ATTENTION — un exemple où tout s'effondre sans hypothèse

Considérons $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(t) = n^2 t(1-t)^n$. On a, pour tout $t \in [0, 1]$ fixé, $f_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ (croissances comparées), donc la limite simple est la fonction nulle, dont l'intégrale vaut 0. Pourtant, par une intégration par parties ou la formule des intégrales de Wallis-Beta, on montre que

$$\int_0^1 f_n(t) \, dt = n^2 \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 \neq 0.$$

La limite de l'intégrale n'est donc pas l'intégrale de la limite. C'est exactement ce genre de pathologie que les théorèmes de continuité/dérivabilité sous le signe intégral permettent d'exclure, à condition de vérifier soigneusement leurs hypothèses.

1 Continuité d'une fonction définie par une intégrale sur un segment

1.1 Cadre et hypothèses

DÉFINITION 1.1 — hypothèses de travail

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$), et

$$f : I \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$$

une fonction. On considère

$$g(x) = \int_a^b f(x, t) dt, \quad x \in I.$$

On dira que f vérifie les **hypothèses de continuité (HC)** sur $I \times [a, b]$ si :

- (HC1) **Continuité partielle en x** : pour tout $t \in [a, b]$, l'application $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I .
- (HC2) **Continuité partielle en t (régularité minimale)** : pour tout $x \in I$, l'application $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux (ou continue) sur $[a, b]$ — ce qui assure l'existence de $g(x)$.
- (HC3) **Hypothèse de domination (sur tout segment, ou globale)** : il existe une fonction $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$, intégrable (continue par morceaux suffit, $[a, b]$ étant un segment) sur $[a, b]$, telle que

$$\forall x \in I, \forall t \in [a, b], \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t).$$

Sur un *segment* $[a, b]$ (intégrale « propre », sans problème de convergence en t), l'hypothèse de domination sert uniquement à garantir la continuité de g par rapport à x : la fonction φ n'a même pas besoin de dépendre de x , ce qui simplifie considérablement les choses par rapport au cas d'une intégrale sur un intervalle non borné (cf. Section 4).

1.2 Le théorème de continuité

THÉORÈME 1.2 — continuité sous le signe intégral, cas du segment

Sous les hypothèses (HC1)–(HC3) ci-dessus, la fonction

$$g : x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$$

est **continue** sur I .

MÉTHODE — comment rédiger une démonstration de continuité

En pratique (et c'est exactement ce que demande l'énoncé de votre photo : « Étudier la continuité de la fonction g en x_0 »), la rédaction-type comporte **quatre étapes**, qu'il faut systématiquement faire apparaître :

1. **Existence** : pour tout $x \in I$, justifier que $t \mapsto f(x, t)$ est continue (ou continue par morceaux) sur $[a, b]$, donc intégrable : $g(x)$ existe bien.
2. **Continuité partielle** : pour $t \in [a, b]$ fixé, justifier que $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I (en général immédiat : sommes, produits, composées de fonctions usuelles).

3. **Domination** : trouver φ continue par morceaux et indépendante de x telle que $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ pour tout $(x, t) \in I \times [a, b]$.
4. **Conclusion** : invoquer le théorème 1.2 pour conclure que g est continue sur I , en particulier en x_0 .

Lorsque $I \times [a, b]$ n'admet pas de domination *globale* simple, on se contente fréquemment d'une domination **locale** : pour démontrer la continuité en un point $x_0 \in I$, il suffit de trouver un voisinage $[x_0 - \eta, x_0 + \eta] \cap I$ de x_0 et une fonction φ (pouvant dépendre de x_0 et η) telle que

$$\forall x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \cap I, \forall t \in [a, b], \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t).$$

Comme la continuité est une propriété *locale*, cela suffit à conclure que g est continue en x_0 . C'est très utile lorsque f explose au voisinage des bords de I .

1.3 Exemples instructifs

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \int_0^1 \cos(xt^2) dt.$$

Montrons que g est continue sur $\mathbb{R}$.

- **Existence** : pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $t \mapsto \cos(xt^2)$ est continue sur $[0, 1]$, donc $g(x)$ existe.
- **Continuité partielle** : pour $t \in [0, 1]$ fixé, $x \mapsto \cos(xt^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (composée de fonctions usuelles).
- **Domination** : pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$,

$$|\cos(xt^2)| \leq 1 =: \varphi(t),$$

et φ est (constante, donc) continue, intégrable sur $[0, 1]$, indépendante de x .

Le théorème 1.2 s'applique : g est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit

$$g(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt, \quad x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Ici, une domination *globale* sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, 1]$ par une fonction indépendante de x n'est pas immédiate car t^x peut devenir grand si x est mal contrôlé... en réalité $t \in [0, 1]$ donne $t^x \leq 1$ pour tout $x \geq 0$, donc ici la domination globale $|f(x, t)| \leq \frac{1}{1+t} =: \varphi(t)$ fonctionne directement (avec φ continue sur $[0, 1]$, donc intégrable). On conclut que g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (et même sur $\mathbb{R}_+$).

Variante pédagogique : si l'on avait $g(x) = \int_0^1 \frac{1}{t^x + 1} dt$ pour $x \in \mathbb{R}$ tout entier (y compris $x < 0$,

où $t^x \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow 0^+$ si $x < 0$), une domination globale uniforme en x sur tout $\mathbb{R}$ n'existerait pas forcément; on raisonnerait alors **segment par segment** : pour $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé, on travaille sur $[x_0 - 1, x_0 + 1]$ et on majore t^x uniformément pour x dans ce segment, ce qui suffit pour conclure à la continuité en x_0 , donc sur $\mathbb{R}$ tout entier puisque x_0 est arbitraire.

Le théorème 1.2 peut se voir comme un cas particulier (ou un substitut commode) du résultat suivant : si (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$ et que chaque f_n est continue, alors $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$ et la limite est continue. Le rôle de l'hypothèse de domination est de garantir un contrôle **uniforme** (indépendant de x) qui empêche les pathologies de type « bosse glissante » illustrées en introduction.

2 Dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale sur un segment

2.1 Le théorème de Leibniz

On souhaite maintenant savoir si $g(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ est dérivable, et calculer $g'(x)$. L'idée naturelle — « dériver sous l'intégrale », c'est-à-dire poser $g'(x) \stackrel{?}{=} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$ — est **légitime** sous hypothèses analogues à celles de la continuité, appliquées cette fois à la dérivée partielle.

DÉFINITION 2.1 — hypothèses de travail pour la dérivabilité

On dit que $f : I \times [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ vérifie les **hypothèses de dérivabilité (HD)** si :

- (HD1) Pour tout $t \in [a, b]$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (on dispose donc d'une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ pour tout (x, t)).
- (HD2) Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue (ou continue par morceaux) sur $[a, b]$ (existence de g).
- (HD3) Pour tout $x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue (ou continue par morceaux) sur $[a, b]$.
- (HD4) **Hypothèse de domination de la dérivée partielle** : il existe $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux, intégrable sur $[a, b]$, indépendante de x , telle que

$$\forall x \in I, \forall t \in [a, b], \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi(t).$$

THÉORÈME 2.2 — dérivation sous le signe intégral, dit « théorème de Leibniz »

Sous les hypothèses (HD1)–(HD4), la fonction $g : x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$ est de **classe $\mathcal{C}^1$** sur I , et

$$\forall x \in I, \quad g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

De plus, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ vérifiant elle-même les hypothèses (HC) du théorème 1.2 (par (HD3)–(HD4)), g' est continue sur I — ce qui justifie que g est bien $\mathcal{C}^1$ et pas seulement dérivable.

Ce théorème est l'exact analogue, pour les intégrales à paramètre, du théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions : on ne peut permuter $\frac{d}{dx}$ et $\int$ que si l'on contrôle *uniformément* (en x) la dérivée partielle. L'hypothèse de domination (HD4) joue ici exactement le rôle de la convergence normale dans le cadre des séries.

2.2 Méthode de rédaction

MÉTHODE — rédaction-type d'une étude de dérivabilité

Pour répondre à la question « Étudier la dérivabilité de g en x_0 » (ou sur I tout entier), on rédige dans l'ordre :

1. (HD1) $x \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur I , pour tout t fixé — on calcule explicitement $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$.
2. (HD2) $t \mapsto f(x, t)$ continue (par morceaux) sur $[a, b]$, pour tout x — assure l'existence de g .
3. (HD3) $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ continue (par morceaux) sur $[a, b]$, pour tout x — assure l'existence de $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.
4. (HD4) Domination : trouver ψ continue par morceaux, intégrable sur $[a, b]$, **indépendante de x** , telle que $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi(t)$ pour tout (x, t) (au moins localement autour de x_0 , ce qui suffit pour la dérivabilité en x_0).
5. **Conclusion** : g est $\mathcal{C}^1$ sur I (en particulier dérivable en x_0), avec $g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

! ATTENTION — l'erreur la plus fréquente

Ne jamais dériver sous l'intégrale sans justifier la domination de $\frac{\partial f}{\partial x}$. Le simple fait que $x \mapsto f(x, t)$ soit dérivable pour chaque t ne suffit pas : c'est exactement l'hypothèse (HD4) qui manque dans l'exemple pathologique de l'introduction et qui doit toujours être explicitement vérifiée (ou invoquée via une domination locale) avant d'écrire $g'(x) = \int \partial_x f$.

2.3 Exemples instructifs

Soit $g(x) = \int_0^1 e^{-xt^2} dt$, pour $x \in \mathbb{R}$. Montrons que g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculons g' .

- (HD1) Pour $t \in [0, 1]$ fixé, $x \mapsto e^{-xt^2}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -t^2 e^{-xt^2}.$$

- (HD2)–(HD3) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $t \mapsto e^{-xt^2}$ et $t \mapsto -t^2 e^{-xt^2}$ sont continues sur $[0, 1]$.
- (HD4) Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 1]$ (on se restreint à $x \geq 0$ pour simplifier ; un raisonnement local analogue marche pour $x < 0$) :

$$|-t^2 e^{-xt^2}| = t^2 e^{-xt^2} \leq t^2 \leq 1 =: \psi(t),$$

fonction continue donc intégrable sur $[0, 1]$, indépendante de x .

Donc g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ (et, par un argument local similaire, sur $\mathbb{R}$ tout entier), avec

$$g'(x) = - \int_0^1 t^2 e^{-xt^2} dt.$$

On souhaite calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ (intégrale impropre, convergente par le critère d'Abel/Dirichlet, mais *non absolument convergente*). On introduit, pour $x \geq 0$,

$$g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Étape 1 (existence et continuité sur $\mathbb{R}_+$). Pour $t = 0$, $\frac{\sin t}{t} \rightarrow 1$ donc $t \mapsto e^{-xt} \sin t/t$ se prolonge continûment en 0. Pour $x > 0$, l'intégrale converge absolument car $|e^{-xt} \sin t/t| \leq e^{-xt}$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$. En $x = 0$, la convergence simple résulte du critère d'Abel (oscillation de $\sin t$, décroissance de $1/t$). On admet (ou démontre à l'aide d'une intégration par parties et du théorème de continuité appliqué à des segments croissants) que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Étape 2 (dérivabilité sur $\mathbb{R}_+^*$). Sur $I = [\alpha, +\infty)$ avec $\alpha > 0$ fixé, on pose $f(x, t) = e^{-xt} \sin t/t$ pour $t > 0$ et $f(x, 0) = 1$. Alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -e^{-xt} \sin t$, continue en t , et

$$|-e^{-xt} \sin t| \leq e^{-xt} \leq e^{-\alpha t} =: \psi(t),$$

intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et indépendante de $x \geq \alpha$. Le théorème de Leibniz (sa version sur intervalle non borné, cf. Section 4) donne, pour $x > 0$,

$$g'(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t dt.$$

Un calcul classique (deux intégrations par parties, ou passage par les complexes via $\sin t = \operatorname{Im}(e^{it})$) donne

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t dt = \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{donc} \quad g'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Étape 3 (primitive et limites). On a donc $g(x) = -\arctan(x) + C$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $g(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$ (domination par e^{-xt}) et $\arctan(x) \rightarrow \pi/2$, on trouve $C = \pi/2$, soit

$$g(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x), \quad x > 0.$$

Étape 4 (conclusion par continuité en 0). Par continuité de g en 0^+ (Étape 1),

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Cet exemple est le grand classique illustrant la puissance de la méthode : on « fabrique » un paramètre x pour transformer une intégrale rétive en une fonction dérivable que l'on sait intégrer.

3 Démonstrations complètes (via l'inégalité des accroissements finis et les formules de Taylor)

Les théorèmes 1.2 et 2.2 sont habituellement démontrés, en cours de prépa, à l'aide du théorème de convergence dominée de Lebesgue. Cet outil est puissant mais hors-programme en première année et peu intuitif. On propose ici des **démonstrations complètes et autonomes**, reposant uniquement sur :

- l'**inégalité des accroissements finis (IAF)** : si φ est dérivable sur un intervalle et $|\varphi'| \leq K$ sur cet intervalle, alors φ est K -lipschitzienne ;
- la **formule de Taylor-Lagrange** (ou son corollaire, l'inégalité de Taylor-Lagrange) pour le contrôle fin du taux de variation lors de la dérivation sous le signe intégral ;
- la **continuité uniforme sur un compact** (théorème de Heine).

On se place dans le cadre le plus utile en pratique (celui de l'Exercice 1, qui couvre l'écrasante majorité des situations rencontrées en classe) : f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont **continues sur $I \times [a, b]$ tout entier**. C'est une hypothèse légèrement plus forte que (HC1)-(HC3)/(HD1)-(HD4) prises séparément, mais elle est presque toujours satisfaite en exercice et permet des démonstrations complètement élémentaires.

3.1 Rappels des outils élémentaires

THÉORÈME 3.1 — inégalité des accroissements finis

Soit $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[\alpha, \beta]$ et dérivable sur $] \alpha, \beta[$. S'il existe $K \geq 0$ tel que $|\varphi'(u)| \leq K$ pour tout $u \in] \alpha, \beta[$, alors

$$|\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)| \leq K |\beta - \alpha|.$$

Plus généralement, pour tous $u, v \in [\alpha, \beta]$, $|\varphi(u) - \varphi(v)| \leq K |u - v|$ (φ est K -lipschitzienne).

THÉORÈME 3.2 — formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1

Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle contenant x et $x + h$, et deux fois dérivable sur l'intérieur de cet intervalle. Il existe c strictement compris entre x et $x + h$ tel que

$$\varphi(x + h) = \varphi(x) + h \varphi'(x) + \frac{h^2}{2} \varphi''(c).$$

En particulier, si $|\varphi''| \leq M$ sur l'intervalle considéré, on a l'**inégalité de Taylor-Lagrange** :

$$|\varphi(x + h) - \varphi(x) - h \varphi'(x)| \leq \frac{M}{2} h^2.$$

THÉORÈME 3.3 — théorème de Heine

Toute fonction continue sur un compact (en particulier sur un produit de segments $[\alpha, \beta] \times [a, b]$) y est **uniformément continue**, et y est **bornée** (théorème des bornes atteintes).

3.2 Démonstration du théorème de continuité (théorème 1.2)

PROPOSITION 3.4 — énoncé démontré ici

Soit $f : I \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $I \times [a, b]$. Alors $g(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ est continue sur I .

MÉTHODE — démonstration complète, par continuité uniforme

Soit $x_0 \in I$. Montrons que g est continue en x_0 . Fixons un segment $[\alpha, \beta] \subset I$ contenant x_0 (par exemple $[\alpha, \beta] = I \cap [x_0 - 1, x_0 + 1]$, restreint si besoin pour être inclus dans I).

Étape 1 (continuité uniforme par Heine). Le produit $[\alpha, \beta] \times [a, b]$ est un **compact** de $\mathbb{R}^2$ (produit de deux segments). Comme f est continue sur ce compact, le théorème de Heine (théorème 3.3) assure que f y est **uniformément continue** :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, t), (x', t') \in [\alpha, \beta] \times [a, b], \quad \|(x, t) - (x', t')\| \leq \eta \implies |f(x, t) - f(x', t')| \leq \varepsilon.$$

Étape 2 (application à $t' = t$). Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $\eta > 0$ comme ci-dessus. Pour tout $x \in [\alpha, \beta]$ tel que $|x - x_0| \leq \eta$, et pour tout $t \in [a, b]$ (on applique l'uniforme continuité avec $t' = t$, donc $\|(x, t) - (x_0, t)\| = |x - x_0| \leq \eta$) :

$$|f(x, t) - f(x_0, t)| \leq \varepsilon.$$

Cette majoration est **valable pour tout $t \in [a, b]$ simultanément** : c'est exactement la propriété d'uniformité recherchée, obtenue ici gratuitement grâce à la compacité.

Étape 3 (passage à l'intégrale). Pour un tel x ,

$$|g(x) - g(x_0)| = \left| \int_a^b (f(x, t) - f(x_0, t)) dt \right| \leq \int_a^b |f(x, t) - f(x_0, t)| dt \leq \int_a^b \varepsilon dt = (b - a) \varepsilon.$$

Conclusion. On a montré :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [\alpha, \beta], \quad |x - x_0| \leq \eta \implies |g(x) - g(x_0)| \leq (b - a) \varepsilon.$$

Comme $(b - a)$ est une constante fixée, ceci signifie exactement que $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} g(x_0)$: g est **continue en x_0** . Le point x_0 étant arbitraire dans I , g est continue sur I . ■

Si l'on suppose de plus que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $I \times [a, b]$ (hypothèse du théorème de Leibniz, donc plus forte mais très fréquente en pratique), on peut éviter le théorème de Heine et utiliser directement l'IAF :

Sur le compact $[\alpha, \beta] \times [a, b]$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue donc **bornée** (théorème des bornes atteintes, cas particulier du théorème de Heine) : il existe $M \geq 0$ tel que $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq M$ pour tout $(x, t) \in [\alpha, \beta] \times [a, b]$.

Pour $t \in [a, b]$ fixé, l'application $x \mapsto f(x, t)$ est dérivable sur $[\alpha, \beta]$, de dérivée bornée par M : l'IAF (théorème 3.1) donne, pour tous $x, x_0 \in [\alpha, \beta]$,

$$|f(x, t) - f(x_0, t)| \leq M |x - x_0|.$$

Cette majoration ne dépend pas de t : c'est elle qui joue le rôle de la fonction dominante

constante $\varphi(t) = M|x - x_0|$. On en déduit directement, comme à l'étape 3 ci-dessus,

$$|g(x) - g(x_0)| \leq \int_a^b M|x - x_0| dt = M(b-a)|x - x_0| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0.$$

On retrouve la continuité de g en x_0 , avec en prime le caractère **lipschitzien** de g sur $[\alpha, \beta]$ (donc une information plus précise que la simple continuité).

3.3 Démonstration du théorème de Leibniz (théorème 2.2)

PROPOSITION 3.5 — énoncé démontré ici

Soit $f : I \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont continues sur $I \times [a, b]$. Alors $g(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , avec $g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

MÉTHODE — démonstration complète, par accroissements finis appliqués au taux de variation

Soit $x_0 \in I$ et $[\alpha, \beta] \subset I$ un segment contenant x_0 , fixé comme précédemment. On veut montrer que

$$\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt.$$

Étape 1 (écriture du taux de variation comme intégrale). Pour $h \neq 0$ assez petit (pour que $x_0 + h \in [\alpha, \beta]$),

$$\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt = \int_a^b R(h, t) dt,$$

$$\text{où } R(h, t) := \frac{f(x_0 + h, t) - f(x_0, t)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t).$$

Il suffit de montrer que $\int_a^b R(h, t) dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

Étape 2 (estimation de $R(h, t)$ par l'IAF appliquée à $\frac{\partial f}{\partial x}$). Fixons $t \in [a, b]$. Par la formule des accroissements finis (égalité de la moyenne) appliquée à $u \mapsto f(u, t)$ entre x_0 et $x_0 + h$: il existe c_t strictement compris entre x_0 et $x_0 + h$ tel que

$$f(x_0 + h, t) - f(x_0, t) = h \frac{\partial f}{\partial x}(c_t, t).$$

Donc

$$R(h, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(c_t, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t).$$

Étape 3 (contrôle uniforme par continuité uniforme de $\partial_x f$). La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur le compact $[\alpha, \beta] \times [a, b]$, donc uniformément continue par le théorème de Heine (théorème 3.3) :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, t), (x', t') \in [\alpha, \beta] \times [a, b], \|(x, t) - (x', t')\| \leq \eta \implies \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x', t') \right| \leq \varepsilon.$$

Or c_t est compris entre x_0 et $x_0 + h$, donc $|c_t - x_0| \leq |h|$. Dès que $|h| \leq \eta$, on a donc, pour **tout** $t \in [a, b]$ simultanément :

$$|R(h, t)| = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(c_t, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right| \leq \varepsilon$$

(on applique l'uniforme continuité avec les deux points (c_t, t) et (x_0, t) , qui sont à distance $|c_t - x_0| \leq |h| \leq \eta$).

Étape 4 (conclusion). Pour $|h| \leq \eta$,

$$\left| \int_a^b R(h, t) dt \right| \leq \int_a^b |R(h, t)| dt \leq (b - a) \varepsilon.$$

Ceci prouve que $\int_a^b R(h, t) dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, donc

$$\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt,$$

ce qui signifie exactement que g est dérivable en x_0 , de dérivée $g'(x_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt$. Le point x_0 étant arbitraire dans I , g est dérivable sur I tout entier avec cette formule. La continuité de g' sur I découle alors de la démonstration de la section précédente, appliquée à $\frac{\partial f}{\partial x}$ au lieu de f (qui est bien continue sur $I \times [a, b]$ par hypothèse) : g est donc $\mathcal{C}^1$ sur I . ■

MÉTHODE — variante quantitative, par la formule de Taylor-Lagrange

Lorsque f est en outre deux fois dérivable par rapport à x , avec $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ continue (donc bornée par une constante M sur $[\alpha, \beta] \times [a, b]$, par le théorème 3.3), on peut remplacer l'argument d'uniforme continuité par un argument **quantitatif** et explicite, via la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 (théorème 3.2) appliquée à $u \mapsto f(u, t)$ en x_0 :

$$\forall t \in [a, b], \forall h \text{ tel que } x_0 + h \in [\alpha, \beta], \quad \left| f(x_0 + h, t) - f(x_0, t) - h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right| \leq \frac{M}{2} h^2.$$

En divisant par $|h|$ puis en intégrant sur $[a, b]$ (comme à l'étape 4 ci-dessus) :

$$\left| \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt \right| \leq \frac{M(b-a)}{2} |h| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

avec, cette fois, une **vitesse de convergence explicite** (linéaire en $|h|$), ce que ne donnait pas directement l'argument de continuité uniforme. C'est cette variante qui est la plus proche en esprit de ce que l'on peut présenter dès la Terminale (cf. Section 7, où l'analogue de cette inégalité est retrouvé à l'aide de l'inégalité des accroissements finis seule, sans dérivée seconde).

Le prix à payer pour éviter le théorème de convergence dominée est de devoir supposer f continue (et $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue, pour Leibniz) sur le produit $I \times [a, b]$ **tout entier**, ce qui permet

d'invoquer la compacité de $[\alpha, \beta] \times [a, b]$. Les hypothèses (HC1)-(HC3) et (HD1)-(HD4) des sections précédentes sont en réalité **plus générales** (elles autorisent une simple continuité par morceaux en t , et une domination ad hoc qui n'a pas besoin de provenir de la compacité). Ces hypothèses plus générales nécessitent, pour une preuve complète, le théorème de convergence dominée — hors-programme en MPSI/MP, mais standard en deuxième année et utilisé implicitement dans tout cours de prépa sous la forme des théorèmes 1.2 et 2.2 admis. En pratique, l'écrasante majorité des exercices se traitent dans le cadre $\mathcal{C}^1$ global couvert par les démonstrations ci-dessus.

4 Extension : intégrales sur un intervalle quelconque

Dans de nombreuses applications (fonction Γ , transformée de Laplace, intégrale de Gauss...), la variable t parcourt un intervalle **non borné** ou **ouvert** J (par exemple $J = \mathbb{R}_+$, $J = \mathbb{R}$, $J =]0, 1[$), et l'intégrale $\int_J f(x, t) dt$ est une intégrale *impropre* ou *généralisée*. Les théorèmes précédents s'étendent, à condition de remplacer « intégrable sur le segment » par « intégrable sur J ».

THÉORÈME 4.1 — continuité, cas général

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K}$ telle que :

- (i) pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I ;
- (ii) pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J ;
- (iii) **domination** : il existe $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable sur J , indépendante de x , telle que

$$\forall (x, t) \in I \times J, \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t).$$

Alors $g(x) = \int_J f(x, t) dt$ est définie et continue sur I .

THÉORÈME 4.2 — dérivabilité, cas général

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K}$ telle que :

- (i) pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur I ;
- (ii) pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J ;
- (iii) pour tout $x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur J ;
- (iv) **domination de la dérivée** : il existe $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable sur J , indépendante de x , telle que

$$\forall (x, t) \in I \times J, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi(t).$$

Alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

Dans le cas d'un intervalle non borné, il est **très rare** de trouver une domination valable sur I tout entier. La technique standard, à maîtriser absolument, consiste à :

1. fixer un **segment quelconque** $[\alpha, \beta] \subset I$ (ou un voisinage de x_0),
2. établir la domination *sur ce segment seulement* (la constante ou la fonction φ/ψ peut alors dépendre de α, β , mais reste indépendante de $x \in [\alpha, \beta]$),
3. conclure que g est continue (resp. $\mathcal{C}^1$) sur $[\alpha, \beta]$,
4. comme $[\alpha, \beta]$ est arbitraire dans I , conclure que g est continue (resp. $\mathcal{C}^1$) sur I tout entier.

C'est la méthode dite de **domination sur tout segment** (ou « domination locale ») : elle permet de ne jamais se soucier du comportement de f « loin » sur I , ce qui est essentiel car beaucoup

de fonctions usuelles ($t^x, e^{xt} \dots$) n'admettent pas de borne uniforme sur I tout entier mais en admettent une sur tout segment.

On définit, pour $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1) Existence. Au voisinage de 0, $t^{x-1} e^{-t} \sim t^{x-1}$, intégrable en 0 ssi $x - 1 > -1$, i.e. $x > 0$. Au voisinage de $+\infty$, $t^{x-1} e^{-t} = o(1/t^2)$ par croissances comparées, donc intégrable. Ainsi $\Gamma(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

2) Continuité sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+^*$ un segment quelconque ($0 < \alpha < \beta$). Pour $x \in [\alpha, \beta]$ et $t > 0$:

$$t^{x-1} e^{-t} \leq \begin{cases} t^{\alpha-1} e^{-t} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ t^{\beta-1} e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases} =: \varphi_{\alpha, \beta}(t),$$

fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (mêmes arguments qu'au point 1), indépendante de $x \in [\alpha, \beta]$. Le théorème 4.1 (version domination sur tout segment) donne la continuité de Γ sur $[\alpha, \beta]$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Dérivabilité, et même caractère $\mathcal{C}^\infty$. On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = t^{x-1} \ln(t) e^{-t}$, continue en t . Avec la même technique de domination sur $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+^*$ (en séparant à nouveau $0 < t \leq 1$ et $t > 1$, et en utilisant que $|\ln t| t^{x-1}$ reste intégrable par les mêmes arguments de croissances comparées), on obtient que Γ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \ln(t) e^{-t} dt.$$

En itérant (domination des dérivées partielles successives $t^{x-1} (\ln t)^n e^{-t}$ par la même méthode), on montre que Γ est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} (\ln t)^n e^{-t} dt.$$

4) Relation fonctionnelle (rappel). Une intégration par parties classique donne $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ pour $x > 0$, et $\Gamma(1) = 1$, d'où $\Gamma(n+1) = n!$ pour $n \in \mathbb{N}$: Γ prolonge la factorielle.

Soit, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt.$$

Existence et continuité : $|e^{-t^2} \cos(xt)| \leq e^{-t^2} =: \varphi(t)$, intégrable sur $\mathbb{R}$ et indépendante de x : domination globale immédiate, donc g est continue sur $\mathbb{R}$ par le théorème 4.1.

Dérivabilité : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -t e^{-t^2} \sin(xt)$, et $|-t e^{-t^2} \sin(xt)| \leq |t| e^{-t^2} =: \psi(t)$, intégrable sur $\mathbb{R}$, indépendante de x (domination globale, là encore). Donc g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$g'(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(xt) dt.$$

Une intégration par parties ($u = \sin(xt)$, $dv = -te^{-t^2}dt = d(\frac{1}{2}e^{-t^2})$) donne la relation différentielle $g'(x) = -\frac{x}{2}g(x)$, d'où $g(x) = g(0)e^{-x^2/4}$. Comme $g(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss), on obtient finalement

$$g(x) = \sqrt{\pi} e^{-x^2/4}.$$

Cet exemple illustre une stratégie très puissante : **transformer une équation intégrale en équation différentielle** grâce au théorème de Leibniz, puis la résoudre.

5 Synthèse : fiche méthode et pièges classiques

5.1 Tableau récapitulatif

Étape	Pour la continuité	Pour la dérivabilité
Régularité en x	$x \mapsto f(x, t)$ continue, $\forall t$	$x \mapsto f(x, t)$ de classe $\mathcal{C}^1$, $\forall t$
Régularité en t	$t \mapsto f(x, t)$ continue p.m., $\forall x$	$t \mapsto \partial_x f(x, t)$ continue p.m., $\forall x$
Domination	$ f(x, t) \leq \varphi(t)$, φ intégrable, indép. de x	$ \partial_x f(x, t) \leq \psi(t)$, ψ intégrable, indép. de x
Conclusion	g continue sur I	g est $\mathcal{C}^1$ et $g'(x) = \int \partial_x f(x, t) dt$

5.2 Les six réflexes à avoir systématiquement

1. **Toujours commencer par l'existence de $g(x)$** (intégrabilité en t), avant même de parler de continuité ou de dérivabilité : une question « étudier la continuité de g » sous-entend implicitement « en commençant par justifier qu'elle est bien définie ».
2. **La domination doit être indépendante de x** . C'est l'erreur n°1 : majorer $|f(x, t)|$ par une expression qui dépend encore de x ne prouve rien.
3. **Sur un intervalle non borné ou ouvert, dominer sur tout segment** (ou tout voisinage de x_0), pas nécessairement sur I entier.
4. **Bien distinguer dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ et dérivée totale**. On dérive $f(x, t)$ par rapport à x en considérant t comme une constante.
5. **Ne jamais conclure à la dérivabilité sans avoir vérifié la domination de la dérivée partielle (HD4)** : le théorème de continuité et le théorème de Leibniz sont deux théorèmes *distincts*, aux hypothèses distinctes.
6. **Penser à la parité, à l'imparité, aux changements de variable** pour simplifier $f(x, t)$ avant de majorer (cf. exemples de Gauss et de Dirichlet) : cela rend souvent la domination triviale.

! ATTENTION — piège : domination uniquement en un point ne suffit pas

Vérifier la domination seulement « pour x fixé » ne sert à rien : cela revient juste à dire que $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable, ce qui est déjà supposé/démontré à l'étape « existence ». L'apport réel du théorème de continuité (ou de Leibniz) tient **tout entier** dans le caractère *uniforme en x* de la majoration.

! ATTENTION — piège : confondre « il existe φ » et « φ continue »

La fonction dominante φ (ou ψ) doit être **continue par morceaux et intégrable** sur l'intervalle d'intégration J ; il ne suffit pas qu'elle soit positive : par exemple $\varphi(t) = 1/t$ sur $]0, 1]$ n'est pas intégrable, une domination par φ ne prouverait donc rien.

6 Exercices corrigés

EXERCICE 1 — le cas général de l'énoncé (cadre abstrait)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b \in I$ avec $a < b$, et $f : I \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $I \times [a, b]$, admettant en outre une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $I \times [a, b]$. On pose

$$g(x) = \int_a^b f(x, t) dt, \quad x \in I.$$

Soit $x_0 \in I$. Montrer que g est continue en x_0 , puis que g est dérivable en x_0 , et exprimer $g'(x_0)$.

1) Continuité en x_0 .

Comme $[a, b]$ est un **segment** (compact), et f est continue sur le compact $K = [x_0 - 1, x_0 + 1] \cap I$ borné fermé... plus simplement : choisissons un segment $[\alpha, \beta] \subset I$ contenant x_0 (par exemple $[\alpha, \beta] = I \cap [x_0 - 1, x_0 + 1]$, ou tout segment compact contenant x_0 et contenu dans I). La fonction f est continue sur le **compact** $[\alpha, \beta] \times [a, b]$ (produit de deux segments), donc f y est **bornée** : il existe $M \geq 0$ tel que

$$\forall (x, t) \in [\alpha, \beta] \times [a, b], \quad |f(x, t)| \leq M.$$

On pose $\varphi(t) = M$ pour $t \in [a, b]$: c'est une fonction constante, donc continue, donc intégrable sur le segment $[a, b]$, et indépendante de x .

On vérifie les hypothèses du théorème de continuité (théorème 1.2) sur $[\alpha, \beta] \times [a, b]$:

- pour $t \in [a, b]$ fixé, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[\alpha, \beta]$ (restriction d'une fonction continue sur I) ;
- pour $x \in [\alpha, \beta]$ fixé, $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[a, b]$, donc intégrable : $g(x)$ existe ;
- domination : $|f(x, t)| \leq \varphi(t) = M$, indépendante de $x \in [\alpha, \beta]$.

Donc g est continue sur $[\alpha, \beta]$, en particulier **continue en x_0** .

2) Dérivabilité en x_0 .

De même, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur le compact $[\alpha, \beta] \times [a, b]$, donc **bornée** : il existe $M' \geq 0$ tel que

$$\forall (x, t) \in [\alpha, \beta] \times [a, b], \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq M'.$$

On pose $\psi(t) = M'$, fonction constante donc continue, intégrable sur $[a, b]$, indépendante de x . Les hypothèses du théorème de Leibniz (théorème 2.2) sont vérifiées sur $[\alpha, \beta] \times [a, b]$:

- pour $t \in [a, b]$ fixé, $x \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$ (car $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue, par hypothèse sur I tout entier) ;
- pour $x \in [\alpha, \beta]$, $t \mapsto f(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ sont continues sur $[a, b]$;
- domination : $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi(t) = M'$, indépendante de x .

Donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$, en particulier **dérivable en** x_0 , avec

$$g'(x_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt$$

Conclusion générale. Puisque x_0 est arbitraire dans I , ce raisonnement (valable sur n'importe quel segment $[\alpha, \beta] \subset I$) montre en fait que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I **tout entier**, avec $g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$ pour tout $x \in I$.

À retenir : dès que f et $\partial_x f$ sont *continues sur* $I \times [a, b]$ (et non plus seulement continues séparément en chaque variable), la domination s'obtient **automatiquement et gratuitement** par compacité, via le théorème des bornes atteintes sur tout produit de segments $[\alpha, \beta] \times [a, b] \subset I \times [a, b]$. C'est le cas le plus fréquent en exercice, et celui qui correspond exactement à l'énoncé de votre photo.

EXERCICE 2 — application directe

Soit $g(x) = \int_0^\pi \ln(1 + x \cos t) dt$, définie pour $x \in]-1, 1[$.

- Montrer que g est bien définie et continue sur $] -1, 1[$.
- Montrer que g est $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$ et exprimer $g'(x)$ sous forme d'une intégrale.

a) Existence et continuité. Pour $x \in]-1, 1[$ et $t \in [0, \pi]$, on a $\cos t \in [-1, 1]$ donc $x \cos t \in]-1, 1[$, donc $1 + x \cos t > 0$: la fonction $f(x, t) = \ln(1 + x \cos t)$ est bien définie et continue sur $] -1, 1[\times [0, \pi]$ (composée de fonctions continues, dénominateur... ici pas de dénominateur, juste composition de $\ln$ avec une fonction affine en $\cos t$ qui ne s'annule pas).

Soit $[\alpha, \beta] \subset]-1, 1[$ un segment quelconque. Posons $\rho = \max(|\alpha|, |\beta|) < 1$. Pour $x \in [\alpha, \beta]$ et $t \in [0, \pi]$:

$$1 + x \cos t \in [1 - \rho, 1 + \rho] \subset]0, +\infty[,$$

donc f est continue (donc bornée) sur le compact $[\alpha, \beta] \times [0, \pi]$: il existe M tel que $|f(x, t)| \leq M =: \varphi(t)$ pour tout $(x, t) \in [\alpha, \beta] \times [0, \pi]$ (φ constante, donc continue, intégrable sur $[0, \pi]$, indépendante de x).

Le théorème de continuité (domination sur tout segment) donne que g est continue sur $[\alpha, \beta]$, donc, $[\alpha, \beta]$ étant arbitraire, g est continue sur $] -1, 1[$.

b) Dérivabilité. On calcule, pour $1 + x \cos t \neq 0$ (toujours vrai ici) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{\cos t}{1 + x \cos t}.$$

C'est une fonction continue de (x, t) sur $] -1, 1[\times [0, \pi]$ (même argument que ci-dessus : le dénominateur ne s'annule pas). Avec les mêmes notations $[\alpha, \beta]$ et $\rho < 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue donc bornée sur le compact $[\alpha, \beta] \times [0, \pi]$: il existe M' tel que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq M' =: \psi(t), \quad \forall (x, t) \in [\alpha, \beta] \times [0, \pi],$$

ψ constante donc continue, intégrable sur $[0, \pi]$, indépendante de x .

Le théorème de Leibniz (domination sur tout segment) s'applique : g est $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$, donc sur $] -1, 1[$ tout entier, avec

$$g'(x) = \int_0^\pi \frac{\cos t}{1 + x \cos t} dt, \quad x \in] -1, 1[.$$

On peut aller plus loin : le changement de variable $u = \tan(t/2)$ permet de calculer explicitement cette dernière intégrale (intégrale d'une fonction rationnelle en u) et d'obtenir $g'(x) = \frac{\pi}{x} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \right)$ pour $x \neq 0$, puis $g(x) = \pi \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{2} \right)$ après intégration et détermination de la constante via $g(0) = 0$. Ce calcul, hors-programme dans le détail, illustre la richesse de ces fonctions.

EXERCICE 3 — domination locale indispensable

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t} \cos(xt) dt$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Posons $f(x, t) = \frac{e^{-t}}{1+t} \cos(xt)$ pour $t \geq 0$.

Existence : pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ et

$$|f(x, t)| \leq e^{-t},$$

intégrable sur $\mathbb{R}_+$: donc $g(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Continuité : comme $|f(x, t)| \leq e^{-t} =: \varphi(t)$ pour **tout** $x \in \mathbb{R}$ (domination *globale*, ici exceptionnellement valable sur $\mathbb{R}$ entier car $|\cos(xt)| \leq 1$ ne dépend pas de x), le théorème de continuité (théorème 4.1) s'applique directement : g est continue sur $\mathbb{R}$.

Dérivabilité : on calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\frac{t e^{-t}}{1+t} \sin(xt).$$

Là encore,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t e^{-t}}{1+t} \leq t e^{-t} =: \psi(t),$$

fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (croissances comparées), **indépendante de x** (la domination globale fonctionne encore, car $|\sin(xt)| \leq 1$ ne dépend pas de x). Le théorème de Leibniz s'applique sur $\mathbb{R}$ tout entier : g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$g'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t e^{-t}}{1+t} \sin(xt) dt.$$

Cet exercice est volontairement plus confortable que les précédents : la présence de $\cos(xt)$ et $\sin(xt)$, bornés par 1 indépendamment de x , permet une domination *globale* immédiate. Ce n'est pas toujours le cas (cf. fonction Γ , Exemple 4), d'où l'importance de savoir basculer vers une domination *sur tout segment* dès que x intervient autrement que par une fonction bornée comme $\cos$ ou $\sin$.

EXERCICE 4 — intégrale de Fresnel, calcul complet par paramètre

On admet la convergence de l'intégrale de Fresnel $J = \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$. Le but de cet exercice est de la calculer à l'aide d'un paramètre auxiliaire, en admettant l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a) On pose, pour $x \geq 0$, $h(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} \cos(t^2) dt$. Justifier que h est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que h est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $h'(x)$ sous forme d'une intégrale.

c) On admet le résultat classique

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt^2} \sin(t^2) dt = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{2(\sqrt{1+x^2}+x)}}$$

(la forme exacte de cette expression n'est pas à retenir). Décrire, sans détailler tous les calculs, la stratégie permettant d'en déduire $J = \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

a) Existence et continuité. Pour $x \geq 0$ et $t \geq 0$,

$$|e^{-xt^2} \cos(t^2)| \leq e^{-xt^2} \leq 1 \quad (\text{pour } t \text{ borné}),$$

ce qui ne suffit pas seul à l'intégrabilité en $+\infty$ si $x = 0$. Précisons : pour $x > 0$ fixé, $e^{-xt^2} \rightarrow 0$ exponentiellement donc $t \mapsto e^{-xt^2} \cos(t^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (domination par e^{-xt^2} , intégrable). En $x = 0$, $h(0) = J$ existe par convergence de l'intégrale de Fresnel (résultat admis, obtenu par exemple via le critère d'Abel après le changement de variable $u = t^2$).

Pour la continuité sur $\mathbb{R}_+^*$: sur tout segment $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+^*$ ($\alpha > 0$),

$$|e^{-xt^2} \cos(t^2)| \leq e^{-\alpha t^2} =: \varphi(t), \quad \forall x \in [\alpha, \beta],$$

fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et indépendante de x : le théorème de continuité (domination sur tout segment) donne la continuité de h sur $\mathbb{R}_+^*$. (La continuité en 0 s'obtient par un argument plus fin, de type convergence dominée généralisée / Abel uniforme, qu'on admet ici.)

b) Dérivabilité sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -t^2 e^{-xt^2} \cos(t^2)$. Sur $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+^*$,

$$|-t^2 e^{-xt^2} \cos(t^2)| \leq t^2 e^{-\alpha t^2} =: \psi(t),$$

fonction continue, intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (croissances comparées : $t^2 e^{-\alpha t^2} \rightarrow 0$ et est dominée par exemple par $e^{-\alpha t^2/2}$ pour t grand), indépendante de $x \in [\alpha, \beta]$. Le théorème de Leibniz s'applique : h est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec

$$h'(x) = - \int_0^{+\infty} t^2 e^{-xt^2} \cos(t^2) dt.$$

c) Stratégie de calcul (idée directrice). On dérive de même h par rapport au sinus, ou l'on relie $h(x)$ à $k(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} \sin(t^2) dt$ via l'équation différentielle obtenue en écrivant

$f(x, t) = e^{-(x-i)t^2}$ et en passant par les complexes (on reconnaît une primitive de type gaussien à paramètre complexe). On résout l'équation différentielle satisfaite par h , on détermine la constante d'intégration grâce à $h(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$, puis on fait tendre $x \rightarrow 0^+$ et on invoque la continuité de h en 0 (établie au a)) pour conclure

$$J = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = h(0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Cet exercice illustre une difficulté réelle et fréquente en MP : la continuité *au bord* du domaine ($x = 0$) demande parfois un argument plus délicat que la simple domination (ici, un argument de type Abel uniforme), alors que la continuité et la dérivabilité *à l'intérieur* ($x > 0$) relèvent directement des théorèmes du cours. Il faut savoir reconnaître quand l'hypothèse de domination simple ne suffit pas et l'énoncer clairement plutôt que de l'occulter.

EXERCICE 5 — la fonction Bêta d'Euler et sa relation avec Γ

Pour $x, y > 0$, on pose

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

- Justifier l'existence de $B(x, y)$ pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.
- Montrer que, $y > 0$ étant fixé, $x \mapsto B(x, y)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Montrer que, $y > 0$ étant fixé, $x \mapsto B(x, y)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $\frac{\partial B}{\partial x}(x, y)$ sous forme intégrale.

a) Existence. Au voisinage de 0, $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim t^{x-1}$, intégrable ssi $x > 0$. Au voisinage de 1, $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim (1-t)^{y-1}$ (par symétrie $t \leftrightarrow 1-t$), intégrable ssi $y > 0$. Donc $B(x, y)$ existe pour tout $x > 0$ et $y > 0$.

b) Continuité en x . Fixons $y > 0$ et un segment $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+^*$. Pour $x \in [\alpha, \beta]$ et $t \in]0, 1[$:

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \leq \begin{cases} t^{\alpha-1}(1-t)^{y-1} & \text{si } 0 < t \leq \frac{1}{2} \\ t^{\beta-1}(1-t)^{y-1} & \text{si } \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases} =: \varphi_{\alpha, \beta}(t),$$

fonction intégrable sur $]0, 1[$ (même argument qu'au a), appliqué séparément en 0 et en 1), indépendante de $x \in [\alpha, \beta]$. Le théorème de continuité (domination sur tout segment) donne la continuité de $x \mapsto B(x, y)$ sur $[\alpha, \beta]$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Dérivabilité en x . On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = t^{x-1} \ln(t) (1-t)^{y-1}$. Avec les mêmes segments $[\alpha, \beta]$, on majore en séparant à nouveau $]0, \frac{1}{2}[$ et $[\frac{1}{2}, 1[$: au voisinage de 0, $|\ln t| t^{x-1}$ reste intégrable pour $x \geq \alpha > 0$ (le logarithme ne perturbe pas l'intégrabilité, par croissances comparées : $t^{(\alpha-x_0)/2} |\ln t| \rightarrow 0$ pour tout $x_0 < \alpha$) ; au voisinage de 1, $(1-t)^{y-1}$ domine sans difficulté liée

au $\ln t$ qui reste borné. On obtient une domination $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi_{\alpha, \beta}(t)$, intégrable sur $]0, 1[$, indépendante de $x \in [\alpha, \beta]$. Le théorème de Leibniz donne alors que $x \mapsto B(x, y)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec

$$\frac{\partial B}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} \ln(t) (1-t)^{y-1} dt.$$

On démontre (hors-programme dans le détail, mais résultat classique et très utile) la formule

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

qui relie les deux fonctions spéciales introduites dans ce chapitre. Cette identité, obtenue en calculant $\Gamma(x)\Gamma(y)$ comme une intégrale double puis en passant en coordonnées « polaires généralisées » $t = ru$, $1-t \leftrightarrow \dots$ (changement de variables adapté), illustre la profondeur du sujet : les fonctions définies par une intégrale à paramètre ne sont pas de simples curiosités techniques, mais de véritables **bricks fondamentales de l'analyse** (combinatoire, probabilités — lois Bêta et Gamma —, physique statistique, etc.).

EXERCICE 6 — dérivabilité avec vitesse de convergence explicite, via Taylor-Lagrange

Soit $g(x) = \int_0^1 e^{xt} dt$, pour $x \in \mathbb{R}$.

- Calculer $g(x)$ explicitement, puis vérifier que g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $g'(x) = \int_0^1 t e^{xt} dt$.
- Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $[\alpha, \beta]$ un segment contenant x_0 . En utilisant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 (théorème 3.2) appliquée à $u \mapsto e^{ut}$, montrer qu'il existe une constante $M = M(\alpha, \beta)$ telle que

$$\forall t \in [0, 1], \forall h \text{ tel que } x_0 + h \in [\alpha, \beta], \quad |e^{(x_0+h)t} - e^{x_0 t} - ht e^{x_0 t}| \leq \frac{M}{2} h^2.$$

- En déduire une majoration explicite de $\left| \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} - g'(x_0) \right|$ en fonction de h , et retrouver ainsi la dérivabilité de g en x_0 par cette méthode quantitative.

a) Calcul explicite. Pour $x \neq 0$,

$$g(x) = \int_0^1 e^{xt} dt = \left[\frac{e^{xt}}{x} \right]_0^1 = \frac{e^x - 1}{x},$$

et $g(0) = \int_0^1 1 dt = 1$ (cohérent avec la limite de $\frac{e^x - 1}{x}$ en 0). Comme $f(x, t) = e^{xt}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = t e^{xt}$ sont continues sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$, le théorème 2.2 (ou sa démonstration de la Section 3) donne directement que g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$g'(x) = \int_0^1 t e^{xt} dt.$$

b) Majoration par Taylor-Lagrange. Fixons $t \in [0, 1]$ et posons $\varphi(u) = e^{ut}$. Alors $\varphi'(u) = t e^{ut}$ et $\varphi''(u) = t^2 e^{ut}$. Sur le compact $[\alpha, \beta] \times [0, 1]$ (en élargissant légèrement $[\alpha, \beta]$ si besoin pour contenir $x_0 + h$), φ'' est continue donc bornée : il existe $M \geq 0$ tel que

$$|\varphi''(u)| = t^2 e^{ut} \leq M, \quad \forall u \in [\alpha, \beta], \forall t \in [0, 1]$$

(on peut prendre explicitement $M = \max(e^\alpha, e^\beta)$, car $t^2 \leq 1$ et $e^{ut} \leq \max(e^\alpha, e^\beta)$ pour $u \in [\alpha, \beta]$). La formule de Taylor-Lagrange (théorème 3.2) appliquée à φ entre x_0 et $x_0 + h$ donne directement, par l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$|\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) - h\varphi'(x_0)| \leq \frac{M}{2} h^2,$$

soit exactement

$$|e^{(x_0+h)t} - e^{x_0 t} - ht e^{x_0 t}| \leq \frac{M}{2} h^2,$$

majoration indépendante de $t \in [0, 1]$ (puisque M ne dépend que de α, β).

c) Vitesse de convergence explicite. En divisant l'inégalité du b) par $|h|$ puis en intégrant sur $t \in [0, 1]$:

$$\int_0^1 \left| \frac{e^{(x_0+h)t} - e^{x_0 t}}{h} - t e^{x_0 t} \right| dt \leq \int_0^1 \frac{M}{2} |h| dt = \frac{M}{2} |h|.$$

Par l'inégalité triangulaire pour les intégrales,

$$\left| \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} - g'(x_0) \right| = \left| \int_0^1 \left(\frac{e^{(x_0+h)t} - e^{x_0 t}}{h} - t e^{x_0 t} \right) dt \right| \leq \frac{M}{2} |h|.$$

Comme $\frac{M}{2} |h| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, on retrouve $\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} g'(x_0)$, c'est-à-dire la dérivabilité de g en x_0 — avec, en prime, la **vitesse de convergence explicite** $O(|h|)$, information que ne fournit pas directement le théorème de Leibniz énoncé sans démonstration.

Cet exercice illustre concrètement la **Méthode** « variante quantitative » de la Section 3 : dès que l'on dispose d'une dérivée seconde $\partial_x^2 f$ continue (donc bornée sur tout compact), la formule de Taylor-Lagrange remplace avantageusement l'argument abstrait de continuité uniforme, et fournit un contrôle explicite et chiffrable de l'erreur d'approximation — un point de vue particulièrement utile en analyse numérique (estimation d'erreur pour un schéma de différences finies, par exemple).

7 Annexe — Version allégée pour la Terminale SM

Le programme officiel de Terminale Sciences Mathématiques (Maroc) ne traite pas explicitement la notion de « domination » ni le formalisme général $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K}$ présenté dans les sections précédentes. Cette annexe propose donc une version **intuitive et accessible**, fondée sur les outils de Terminale (taux de variation, encadrements, théorème des gendarmes, primitives usuelles), permettant d'aborder **des cas particuliers simples** de fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre — typiquement lorsque l'intégrande est un polynôme en x , ou une fonction usuelle (exponentielle, cosinus...) dont on majore directement les variations.

7.1 Le cas le plus simple : intégrande polynomial en x

MÉTHODE — stratégie de Terminale, sans vocabulaire de domination

Lorsque, pour $t \in [a, b]$ fixé, $f(x, t)$ est un polynôme (ou une fonction usuelle simple) en x , on peut souvent :

1. **Calculer $g(x)$ explicitement**, en intégrant terme à terme par rapport à t (intégrale d'un polynôme, d'une exponentielle, etc.) ;
2. **Étudier directement la fonction g ainsi obtenue** avec les outils usuels de Terminale (dérivation, limites, tableau de variations).

Cette stratégie « calcul direct » évite complètement la question théorique de l'interversion limite/intégrale : on n'a pas besoin du théorème de continuité ni du théorème de Leibniz, puisqu'on dispose d'une expression explicite de $g(x)$.

Soit $g(x) = \int_0^1 (xt + 1)^2 dt$, pour $x \in \mathbb{R}$. On développe :

$$(xt + 1)^2 = x^2 t^2 + 2xt + 1,$$

donc, en intégrant terme à terme,

$$g(x) = x^2 \int_0^1 t^2 dt + 2x \int_0^1 t dt + \int_0^1 1 dt = \frac{x^2}{3} + x + 1.$$

La fonction g est donc un **polynôme du second degré**, manifestement continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$g'(x) = \frac{2x}{3} + 1.$$

On retrouve directement, par le calcul, ce que la théorie générale (théorème de Leibniz) aurait également donné :

$$g'(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} [(xt + 1)^2] dt = \int_0^1 2t(xt + 1) dt = \int_0^1 (2xt^2 + 2t) dt = \frac{2x}{3} + 1.$$

Les deux méthodes coïncident, comme il se doit.

7.2 Continuité par encadrement (esprit « gendarmes »)

MÉTHODE — quand le calcul explicite est impossible

Si l'on ne peut pas calculer $g(x)$ explicitement (par exemple $g(x) = \int_0^1 \cos(xt) dt$ a une expression explicite, mais $\int_0^1 \sqrt{1+x \sin t} dt$ n'en a pas), l'esprit de Terminale consiste à **majorer la différence** $g(x) - g(x_0)$ directement, en revenant à la définition de l'intégrale comme limite de sommes, ou en utilisant une inégalité de type accroissements finis sur f . L'idée clé, qui est la version « artisanale » de l'hypothèse de domination, est :

Si l'on peut majorer $|f(x, t) - f(x_0, t)|$ par une quantité qui tend vers 0 quand $x \rightarrow x_0$, **uniformément pour** $t \in [a, b]$ (c'est-à-dire par une quantité ne dépendant pas de t), alors

$$|g(x) - g(x_0)| = \left| \int_a^b (f(x, t) - f(x_0, t)) dt \right| \leq \int_a^b |f(x, t) - f(x_0, t)| dt \leq (b-a) \cdot \sup_t |f(x, t) - f(x_0, t)|,$$

ce qui prouve la continuité de g en x_0 par le théorème des gendarmes.

Soit $g(x) = \int_0^1 \cos(xt) dt$, $x \in \mathbb{R}$, et $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé. Montrons que g est continue en x_0 avec les outils de Terminale.

On utilise l'inégalité classique (issue du théorème des accroissements finis appliqué à $\cos$, ou simplement admise en Terminale comme propriété de la fonction cosinus) :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}, \quad |\cos u - \cos v| \leq |u - v|.$$

Pour $t \in [0, 1]$, en posant $u = xt$ et $v = x_0 t$:

$$|\cos(xt) - \cos(x_0 t)| \leq |xt - x_0 t| = |t| \cdot |x - x_0| \leq |x - x_0|$$

(car $t \in [0, 1]$ donne $|t| \leq 1$). Cette majoration **ne dépend pas de t** : c'est exactement le point clé. On en déduit

$$|g(x) - g(x_0)| = \left| \int_0^1 (\cos(xt) - \cos(x_0 t)) dt \right| \leq \int_0^1 |x - x_0| dt = |x - x_0|.$$

Comme $|x - x_0| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$, le théorème des gendarmes donne $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} g(x_0)$: **g est continue en x_0** , donc sur $\mathbb{R}$ (x_0 étant arbitraire.)

On retrouve ainsi, avec les seuls outils de Terminale (inégalité des accroissements finis, théorème des gendarmes), exactement la conclusion du théorème de continuité sous le signe intégral. La majoration $|xt - x_0 t| \leq |x - x_0|$ joue ici le rôle de la fonction dominante φ des sections précédentes — sans qu'il soit nécessaire de nommer le concept.

7.3 Dérivabilité par l'inégalité des accroissements finis (esprit Terminale)

MÉTHODE — retrouver la formule de Leibniz sans convergence dominée

De la même façon que la continuité s'obtient en majorant $|f(x, t) - f(x_0, t)|$ uniformément en t , la **dérivabilité** s'obtient en majorant le reste

$$R(x, t) = \frac{f(x, t) - f(x_0, t)}{x - x_0} - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)$$

par une quantité qui tend vers 0 quand $x \rightarrow x_0$, **indépendamment de t** . C'est exactement l'esprit de l'inégalité des accroissements finis : si l'on contrôle la dérivée seconde (ou simplement la régularité de $\partial_x f$), on contrôle ce reste.

Reprenons $g(x) = \int_0^1 \cos(xt) dt$ et montrons, avec les outils de Terminale, que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $g'(x) = -\int_0^1 t \sin(xt) dt$.

Fixons $x_0 \in \mathbb{R}$. On part de l'identité trigonométrique (transformation produit, vue en Terminale) :

$$\cos(xt) - \cos(x_0 t) = -2 \sin\left(\frac{(x + x_0)t}{2}\right) \sin\left(\frac{(x - x_0)t}{2}\right).$$

Comme $|\sin u| \leq |u|$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ (inégalité classique de Terminale, conséquence de l'IAF appliquée à $\sin$ entre 0 et u , car $|\sin'| = |\cos| \leq 1$), on obtient, pour $t \in [0, 1]$:

$$|\cos(xt) - \cos(x_0 t)| \leq 2 \left| \sin\left(\frac{(x - x_0)t}{2}\right) \right| \leq 2 \cdot \frac{|x - x_0| t}{2} = t |x - x_0| \leq |x - x_0|.$$

(On retrouve d'ailleurs ainsi, par une autre voie, la majoration de continuité de l'exemple précédent.) Pour la dérivabilité, on raffine : en utilisant $|\sin u - u| \leq \frac{|u|^3}{6}$ (conséquence de l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 appliquée à $\sin$, ou simplement de l'IAF appliquée deux fois), un calcul un peu plus long (hors du strict cadre de Terminale, mais accessible en approfondissement) montre que

$$\left| \frac{\cos(xt) - \cos(x_0 t)}{x - x_0} + t \sin(x_0 t) \right| \leq C t^2 |x - x_0|$$

pour une constante C universelle (par exemple $C = 1$ convient), **majoration indépendante de $t \in [0, 1]$ à un facteur $t^2 \leq 1$ près**. En intégrant sur $[0, 1]$:

$$\left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - \left(-\int_0^1 t \sin(x_0 t) dt \right) \right| \leq C |x - x_0| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0.$$

On conclut que g est dérivable en x_0 , avec $g'(x_0) = -\int_0^1 t \sin(x_0 t) dt$ — exactement la formule que donnerait directement le théorème de Leibniz, mais obtenue ici par un pur argument d'encadrement et d'inégalités classiques sur $\sin$ et $\cos$, accessibles dès la Terminale.

Cet exemple montre que la **formule de Taylor** (ici, le développement $\sin u = u + O(u^3)$, conséquence de Taylor-Lagrange à l'ordre 2) joue, dans les cas concrets, exactement le rôle que joue la continuité uniforme de $\partial_x f$ dans la démonstration générale de la Section 3 : elle fournit le **contrôle quantitatif uniforme en t** qui permet de passer à la limite sous le signe intégral.

7.4 Ce que l'on peut (et ne peut pas) exiger en Terminale

Exigible / accessible en TSM	Réservé à la prépa (MPSI/MP)
Calcul explicite de $g(x)$ quand $f(x, t)$ est polynomiale ou usuelle en x, t	Cadre général $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K}$ avec hypothèses (HC)/(HD)
Étude de g une fois son expression explicite obtenue (variations, limites)	Domination <i>sur tout segment</i> pour intervalles non bornés
Majoration directe de $ f(x, t) - f(x_0, t) $ par une quantité $\rightarrow 0$, indépendante de t , dans des cas guidés	Fonctions Γ, B , intégrales de Dirichlet/Fresnel/Gauss en autonomie
Théorème des gendarmes appliqué à $g(x) - g(x_0)$	Théorème de Leibniz énoncé et appliqué de façon générale
Inégalités usuelles ($ \sin u \leq u $, etc.) pour la dérivabilité dans des cas guidés	Démonstration générale par IAF/Taylor-Lagrange sur un compact (Section 3)

La logique sous-jacente — contrôler $f(x, t) - f(x_0, t)$ *uniformément en t* — est rigoureusement la même en Terminale et en prépa : seul le degré de généralité et le vocabulaire changent. Un élève de Terminale SM qui maîtrise bien les exemples « guidés » de cette annexe possède déjà, sans le savoir, l'intuition complète du théorème de continuité sous le signe intégral qu'il retrouvera formalisé en MPSI/MP.

Fiche de révision — Continuité & dérivabilité sous le signe intégral

Math & Expert — Pr. R. Abed — à conserver dans votre classeur

$$g(x) = \int_a^b f(x, t) dt \quad \text{ou, sur un intervalle quelconque } J, \quad g(x) = \int_J f(x, t) dt$$

1. Continuité (théorème 1.2 / 4.1)

Hypothèses (HC) sur $I \times [a, b]$ (ou $I \times J$) :

- (1) $x \mapsto f(x, t)$ continue, $\forall t$;
- (2) $t \mapsto f(x, t)$ continue p.m., $\forall x$;
- (3) domination : $\exists \varphi$ continue p.m., intégrable, **indép. de x** , telle que $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$.

$\Rightarrow g$ est continue sur I .

2. Dérivabilité — Leibniz (théorème 2.2 / 4.2)

Hypothèses (HD) : (1) $x \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}^1$, $\forall t$; (2)- (3) f et $\partial_x f$ continues p.m. en t ; (4) domination de $\partial_x f$: $\exists \psi$ continue p.m., intégrable, **indép. de x** , $|\partial_x f(x, t)| \leq \psi(t)$.

$\Rightarrow g$ est $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

3. Rédaction-type (4 étapes)

1. **Existence** de $g(x)$ (intégrabilité en t);
2. **Régularité partielle** en x (continue, ou $\mathcal{C}^1$);
3. **Domination**, indépendante de x — sur I entier, ou **sur tout segment** $[\alpha, \beta] \subset I$ si I non borné ou si f « explose » au bord;
4. **Conclusion** via le théorème adéquat.

4. Cas $\mathcal{C}^1$ global (le plus fréquent)

Si f et $\partial_x f$ sont continues sur $I \times [a, b]$ **tout entier** : sur tout compact $[\alpha, \beta] \times [a, b]$, f et $\partial_x f$ sont **automatiquement bornées** (Heine) $\Rightarrow$ domination gratuite, par une simple constante M . C'est le cas de l'Exercice 1.

5. Outils des démonstrations

IAF : $|\varphi'| \leq K$ sur un intervalle $\Rightarrow \varphi$ est K -lipschitzienne.

Taylor-Lagrange (ordre 1) : si $|\varphi''| \leq M$,

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x) - h\varphi'(x)| \leq \frac{M}{2}h^2.$$

Heine : continue sur un compact $\Rightarrow$ uniformément continue et bornée.

! Pièges classiques : (1) la domination doit être **indépendante de x** — majorer par une expression contenant encore x ne prouve rien. (2) Sur un intervalle non borné, dominer **sur tout segment**, pas sur I entier. (3) Ne jamais dériver sous l'intégrale sans avoir vérifié la domination de $\partial_x f$ (théorème de continuité $\neq$ théorème de Leibniz). (4) La fonction dominante doit être **intégrable** (pas seulement positive).

Exemples de référence

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

($\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, prolonge $n!$)

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

($B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

(via le paramètre e^{-xt})

Fin du chapitre — Math & Expert

Pr. R. Abed