

Les candidats sont informés que la clarté de la rédaction et la qualité de la présentation constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies.

Exercice I

1. Soit x un nombre réel et N un entier naturel non nul.

$[t]$ désignant la partie entière du réel t , on pose :

$$\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket \quad a_k = kx - [kx] \quad \text{et} \quad a_{N+1} = 1$$

- (a) Montrer que pour $k \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket$, les a_k appartiennent au segment $[0, 1]$.
(b) En déduire l'existence d'un couple (i, j) d'entiers tels que

$$0 \leq i < j \leq N+1 \quad \text{et} \quad |a_j - a_i| \leq \frac{1}{N+1}$$

- (c) Montrer qu'il existe p et q entiers tels que

$$1 \leq q \leq N \quad \text{et} \quad |qx - p| \leq \frac{1}{N+1}$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathbb{N}^*$ tels que : $n \geq 2$ et n divise $1 + A^2$.

Montrer que n est somme de deux carrés d'entiers (on pourra appliquer le 1.(c) à $x = \frac{A}{n}$ et $N = [\sqrt{n}]$, puis considérer $m = (qA - pn)^2 + q^2$ et montrer que $m = n$).

3. Pour a, b, c, d entiers, établir l'identité de Lagrange :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

4. Soient a et b deux entiers premiers entre eux et $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ tel que n divise $a^2 + b^2$.
Montrer que n est somme de deux carrés d'entiers.

Exercice II

Le but de cet exercice est d'établir la formule de Stirling

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}} e^n = \sqrt{2\pi}$$

permettant d'obtenir une expression approchée de factoriel n lorsque n est très grand.

1. Soit $(u_n)_n$ une suite de réels et $l \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = l$.

2. Soit ϕ la fonction définie par $\phi(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - x$.

Montrer que ϕ est positive sur l'intervalle $[0, 1[$.

3. Soit ψ la fonction définie par $\psi(x) = \phi(x) - \frac{x^3}{3(1-x^2)}$.

(a) Montrer que ψ est négative sur l'intervalle $[0, 1[$.

(b) En déduire que pour tout $x \in [0, 1[$,

$$0 \leq \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - x \leq \frac{x^3}{3(1-x^2)}$$

(c) En considérant la suite $(x_n)_n$ de terme général $x_n = \frac{1}{2n+1}$, déduire de ce qui précède que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq \frac{2n+1}{2} \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) - 1 \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

4. On considère les suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ définies par

$$a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!} \text{ et } b_n = a_n e^{\frac{1}{12n}}$$

(a) Montrer que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes. On désigne par l leur limite commune.

(b) Justifier que $l > 0$.

5. On s'intéresse maintenant au calcul de l . On donne la formule suivante, connue sous le nom de formule de Wallis ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \frac{2^2 \cdot 4^2 \dots (2n)^2}{1^2 \cdot 3^2 \dots (2n-1)^2} = \pi$$

(a) Montrer en utilisant la formule de Wallis que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)! \sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$$

(b) En déduire que $l = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. (On pourra considérer la sous-suite des termes d'indices pairs extraite de la suite $(a_n)_n$ à savoir la suite $(a_{2n})_n$.)

Problème

Pour $T \in M_2(\mathbb{R})$, on appelle commutant de T l'ensemble noté

$$\mathcal{C}(T) = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / TM = MT\}$$

On rappelle que si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ alors $AX = \begin{pmatrix} a\alpha + b\beta \\ c\alpha + d\beta \end{pmatrix}$

Dans tout le problème on fixe les matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Vérifier que $P^2 - 5P + 7I_2 = 0_{M_2(\mathbb{R})}$ matrice nulle de $M_2(\mathbb{R})$
(b) En déduire que P est inversible avec $P^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. (a) Montrer que $AP = PD$.
(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^n P^{-1}$ avec la convention $A^0 = I_2$
(c) En déduire en fonction de n les expressions des deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 4u_n + 2v_n \end{cases} \text{ avec } u_0 = 1 \text{ et } v_0 = 2$$

Indication : on posera $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

3. (a) Montrer que $M \in \mathcal{C}(A)$ si, et seulement si, $P^{-1}MP \in \mathcal{C}(D)$
(b) Montrer que $T \in \mathcal{C}(D)$ si, et seulement si, $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tel que $T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$
(c) En déduire $\mathcal{C}(A)$.
4. Soient x et y deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = x(t) + 3y(t) \\ y'(t) = 4x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

où x' et y' désignent les fonctions dérivées de x et y

On pose $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et on admet que sa dérivée est $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.

- (a) Justifier que $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t)$.
- (b) On pose $\forall t \in \mathbb{R}, Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$ où α, β deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \alpha'(t) = -2\alpha(t) \\ \beta'(t) = 5\beta(t) \end{cases}$
- (c) Montrer qu'il existe λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} \alpha(t) = \lambda_1 e^{-2t} \\ \beta(t) = \lambda_2 e^{5t} \end{cases}$
- (d) En déduire les expressions de x et y .