Math & Expert
Excellence en Mathématiques | CPGE | Concours
Prof. R. Abed — Agrégé de Mathématiques

RECUEIL D'EXERCICES CORRIGÉS

L'Atelier du Chercheur

Analyse | Algèbre | Arithmétique | Géométrie complexe

Niveau MPSI – MP | Concours blancs & sujets d'écoles

Analyse · Suites · Algèbre · Géométrie

16 énoncés et corrections détaillées | **4** thèmes | **2** parties

Avec méthodes, rappels de cours et astuces du chercheur

Mode d'emploi

Comment tirer le meilleur parti de ce recueil

Ce recueil est conçu comme un véritable **atelier de travail**. Chaque exercice est extrait de concours réels (Lymed, sessions 2023–2025) et retravaillé pour révéler la *méthode* qui se cache derrière la technique.

1. Quatre familles de techniques

Chaque exercice est repéré par un pictogramme de couleur indiquant son thème dominant :

A	**Analyse**	Intégrales, suites fonctionnelles, théorèmes de comparaison, accroissements finis.
S	**Suites & récurrences**	Convergence, monotonie, suites adjacentes, équations de récurrence.
Al	**Algèbre & arithmétique**	PGCD, congruences, ordre multiplicatif, structures sur $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.
G	**Géométrie & complexes**	Module, inégalités sur $\mathbb{C}$, interprétation géométrique.

2. Le niveau de difficulté

Une échelle à trois étoiles signale l'exigence technique attendue :

- ⋆⋆⋆ Application directe du cours, bon exercice d'entraînement initial.
- ⋆⋆⋆ Nécessite d'enchaîner plusieurs idées ou un argument un peu subtil.
- ⋆⋆⋆ Exercice de concours exigeant, souvent multi-étapes ou avec une astuce non standard.

3. Les encadrés pédagogiques

Quatre types d'encadrés balisent le parcours :

Rappel de cours

Un point de cours indispensable à la résolution, rappelé pour éviter d'interrompre votre élan.

 # Méthode

La stratégie générale à adopter face à ce type de situation — le réflexe à acquérir.

∗ Astuce du chercheur

Un raccourci, une reformulation maligne, ou un calcul qui simplifie radicalement la suite.

△ Piège classique

Une erreur fréquente, ou une hypothèse que l'on oublie trop souvent de vérifier.

4. Deux parties, une méthode de travail

La **Partie I** regroupe tous les **énoncés**, organisés par thème, sans aucune indication de solution : c'est votre terrain d'entraînement. La **Partie II** reprend exactement les mêmes exercices dans le même ordre, avec des **corrections intégrales**, commentées et enrichies de rappels.

« Un problème bien posé est un problème à moitié résolu. »

Table des matières

PARTIE I

Énoncés

Seize problèmes pour s’entraîner, sans solutions

A Analyse

Boîte à outils – Analyse

- **Intégrales de type Beta/Wallis** : penser à une intégration par parties pour faire baisser un exposant, ou à un changement de variable $t \mapsto 1-t$ pour révéler une symétrie.
- **Limites en $+\infty$ de quotients** : le théorème de Rolle généralisé (forme « Cauchy ») permet de retrouver la règle de l'Hôpital sans dérivabilité globale.
- **Fonctions à dérivées toutes positives** : la formule de Taylor avec reste intégral transforme l'hypothèse qualitative en information quantitative exploitable.

Exercice 1

A Intégrales eulériennes | ⋆⋆⋆ | ⊙ 20 min

Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on pose

$$I_{n,p} = \int_0^1 t^n (1-t)^p \, \mathrm{d}t.$$

1. Calculer $I_{n,0}$ pour $n \geq 0$.
2. Comparer $I_{n,p}$ et $I_{p,n}$ pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.
3. En déduire la relation de récurrence entre $I_{n,p}$ et $I_{n+1,p-1}$ pour $p \geq 1$.
4. Exprimer $I_{n,p}$ à l'aide de $n!$, $p!$ et $(n+p)!$.
5. Calculer

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2p+1}\theta \, \sin^{2n+1}\theta \, d\theta.$$

Exercice 2

A Règle de l'Hôpital généralisée | ⋆⋆⋆ | ⊙ 45 min

Soit $a > 0$, f et g deux applications deux fois dérivables sur $]a,+\infty[$ telles que g' ne s'annule pas. On suppose de plus que

$$g(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty.$$

1. Montrer qu'il existe $A > a$ tel que, pour tout $t \geq A$, $g(t) > 0$.

   Soit $\varepsilon > 0$; on suppose de plus que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{f'(t)}{g'(t)} = 0$.

2. Montrer qu'il existe $B > A$ tel que, pour tout $t \geq B$,

$$\left|\frac{f'(t)}{g'(t)}\right| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

3. Montrer que, pour tout $t \geq a$,

$$\left|\frac{f(t)}{g(t)}\right| \leq \left|\frac{f(t)-f(B)}{g(t)-g(B)}\right| \times \left|1-\frac{g(B)}{g(t)}\right| + \left|\frac{f(B)}{g(t)}\right|.$$

4. Montrer qu'il existe $C > A$ tel que, pour tout $t \geq C$,

$$\left|\frac{f(B)}{g(t)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \left|1-\frac{g(B)}{g(t)}\right| \leq 2.$$

Montrer que pour tout $t > B$, il existe $y \in]B, t[$ tel que

$$\frac{f(t)-f(B)}{g(t)-g(B)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

Indication : on pourra appliquer le théorème de Rolle à une fonction bien choisie.

5. En déduire que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{f(t)}{g(t)} = 0$.

6. Montrer que si $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{f'(t)}{g'(t)} = \ell$, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{f(t)}{g(t)} = \ell$.

(*On pourra ramener au cas traité dans la question 2.*)

Exercice 3

A **Taylor et positivité des dérivées** | ⋆⋆⋆ | ⊙ 40 min

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indéfiniment dérivable telle que

$$(\forall m \in \mathbb{N}),\ f^{(m)}(x) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0.$$

1. Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x < 0$.

2. Montrer que $f'(0) = 0$, puis que $(\forall m \in \mathbb{N}),\ f^{(m)}(0) = 0$.

3. Montrer que

$$f(x) = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^x f^{(m)}(t)(x-t)^{m-1}\,\mathrm{d}t,$$

puis que

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m!}\int_0^1 (1-t)^m f^{(m)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

4. Montrer que

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{f(1)}{m}.$$

5. En déduire que $f = 0$.

Exercice 4

S Suite de Fibonacci & série associée | ⋆⋆⋆ | ⊙ 30 min

Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

On note

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{2^k}.$$

1. Montrer qu'il existe $1 < C < 2$ tel que $1 + C \leq C^2$.

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq C^n$.

3. En déduire que la suite (s_n) est majorée et qu'elle converge vers une limite finie ℓ.

4. Montrer que $s_{n+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s_{n+1} + \frac{1}{4}s_n$, et en déduire ℓ.

S Suites & récurrences

Boîte à outils – Suites

- **Encadrement par récurrence** : pour montrer $u_n \in I$ pour tout n, vérifier l'initialisation puis la stabilité de I par la fonction de récurrence.
- **Suites adjacentes** : si (a_n) croît, (b_n) décroît et $b_n - a_n \to 0$, elles convergent vers la même limite — outil puissant pour encadrer une limite inconnue.
- **Suites du type** $u_{n+2} = \varphi(u_{n+1}, u_n)$: chercher d'abord une relation de monotonie cachée (souvent $u_{n+1} > u_n$) avant de raisonner par l'absurde sur l'existence même de la suite.

Exercice 5

S Encadrement et équivalent asymptotique | ⋆⋆⋆ | ⊙ 35 min

Soit la suite (x_n) définie par

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ x_{n+1} = 1 + \frac{n}{x_n}, \qquad x_1 = 1.$$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ 1 < x_n \leq n$.

2. Montrer que $(\forall n \geq 2),\ x_{n-1} \leq x_n \Rightarrow x_{n+1} \leq x_{n+2}$.

3. Montrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

4. Montrer que $(\forall n \geq 1),\ x_n \leq \frac{1}{2} + \sqrt{n + \frac{1}{4}}$.

5. Montrer que $(\forall n \geq 2),\ x_n \geq \frac{1}{2} + \sqrt{n - \frac{3}{4}}$.

6. En déduire que $\lim_{n\to\infty} \left(x_n - \frac{1}{2} - \sqrt{n} \right) = 0$.

Exercice 6

S Suites adjacentes et carré parfait | ⋆⋆⋆ | ⊙ 50 min

Soit, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} u_{m+1} = (u_m - 1)^2 \\ a_m = (u_m - 2)^{\frac{1}{2^m}} \\ b_m = (u_m - 1)^{\frac{1}{2^m}} \end{cases}$$

1. Montrer que $u_m \geq 4$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer que $b_m - a_m \leq \dfrac{1}{2^m}$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

3. Montrer que (a_m) et (b_m) sont adjacentes et que $\lim\limits_{m\to+\infty} a_m = \ell$, où $\ell \in]1;2[$.

4. Exprimer (u_m) en fonction de ℓ et montrer que $\lfloor \ell^{2^m} \rfloor + 2$ est un carré parfait.

Exercice 7

S **Une suite qui ne peut pas exister** | ★★★ | ⊙ 25 min

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant :

$$(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n > 0 \qquad \text{et} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n}.$$

Montrer qu'une telle suite ne peut pas exister.

Exercice 8

A **Sous-additivité et majoration** | ★★★ | ⊙ 30 min

Soit f une fonction positive définie sur $[0,1]$, $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$, vérifiant

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2,\quad f(x+y) \geq f(x) + f(y) \quad \text{avec } x+y \leq 1, \quad \text{et } f(1) = 1.$$

1. Que vaut $f(0)$? L'objectif est de démontrer que $\forall x \in [0,1],\ f(x) \leq 2x$.

2. Si $x \geq \dfrac{1}{2}$, montrer que $f(x) \leq 2x$.

3. Si $x \in]0, \frac{1}{2}[$, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $nx > \frac{1}{2}$.

4. En déduire le résultat annoncé.

Algèbre & arithmétique

Boîte à outils – Algèbre & arithmétique

- **Sommes de deux carrés** : la divisibilité par 4 impose souvent la parité simultanée de a et b — un argument de descente infinie suit naturellement.
- **Irrationalité / rationalité** : passer par une écriture en fraction irréductible $a = u/c$ et exploiter le théorème de Gauss ou un argument de plus grande puissance d'un nombre premier.
- **Ordre multiplicatif modulo n** : $o(a)$ divise toujours tout exposant q tel que $a^q \equiv 1 \pmod{n}$ — c'est l'analogue arithmétique de la division euclidienne.

Exercice 9

Sommes de deux carrés et puissances de 2 | ⋆⋆⋆ | ⊙ 30 min

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation $2^k = a^2 + b^2$, avec $k \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si $a^2 + b^2 = N$, avec N un multiple de 4, alors a et b sont pairs.
2. En déduire que l'équation $2^{2n} = a^2 + b^2$ n'admet aucune solution.
3. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $2^{2n+1} = a^2 + b^2$.

Exercice 10

Rationalité forcée par une condition entière | ⋆⋆⋆ | ⊙ 55 min

Soit $a, b \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que : $\forall m \in \mathbb{N}, a^m - b^m \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que $a, b \in \mathbb{Q}_+^*$.
2. Soient $a = \dfrac{u}{c}$ et $b = \dfrac{v}{d}$, avec $u, c, d, v \in (\mathbb{N}^*)^4$ et $u \wedge c = v \wedge d = 1$.
   Montrer que $c = d$.
3. Supposons que $d \neq 1$. Soit p un nombre premier tel que $p \mid d$, et s la plus grande puissance de p qui divise $u - v$.
   Montrer que
   $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=0}^{k-1} u^i v^{k-1-i} \equiv k\, v^{k-1} \pmod{p}.$$
4. En posant $k = sp+1$, montrer que p^k ne divise pas $(u^k - v^k)$ et aboutir à une contradiction.

Exercice 11

Sommes de parties entières et PGCD | ⋆⋆⋆ | ⊙ 50 min

Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

1. Montrer que

$$2\sum_{k=1}^{b-1} E\left(k \cdot \frac{a}{b}\right) = \sum_{k=1}^{b-1} E\left(k \cdot \frac{a}{b}\right) + E\left(a - k \cdot \frac{a}{b}\right).$$

2. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, b-1]\!]$,

$$E\left(k\frac{a}{b}\right) + E\left(a - k\frac{a}{b}\right) = \begin{cases} a & \text{si } k \cdot \dfrac{a}{b} \in \mathbb{N} \\ a-1 & \text{si } k \cdot \dfrac{a}{b} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

3. Montrer que

$$\text{Card}\left(\left\{k \in [\![1, b-1]\!] \;/\; k \cdot \frac{a}{b} \in \mathbb{N}\right\}\right) = a \wedge b - 1.$$

4. Montrer que $a \wedge b = a + b + ab + 2\sum_{k=1}^{b-1} \left\lfloor k \cdot \frac{a}{b} \right\rfloor$.

5. Comparer $\sum_{k=1}^{b-1} E\left(k \cdot \frac{a}{b}\right)$ et $\sum_{k=1}^{a-1} E\left(k \cdot \frac{b}{a}\right)$.

Exercice 12

Ordre multiplicatif & diviseurs de Mersenne | ⋆⋆⋆ | ⊙ 45 min

Soient $a, n \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux : $a \wedge n = 1$. On note $r_i \in [0, n-1]$ le reste de la division euclidienne de a^i par n ($i \in \mathbb{N}$).

1. Montrer qu'il existe $i < j$ tels que $r_i = r_j$.

2. En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^k \equiv 1 \pmod{n}$.

Dans la suite, on note $o(a)$ le plus petit entier k non nul tel que $a^k \equiv 1 \pmod{n}$.

3. Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $a^q \equiv 1 \pmod{n}$. Montrer que $o(a)$ divise q.

Indication : penser à une division euclidienne.

4. **Une application.** Soit $n \geq 2$ tel que n divise $2^n - 1$. On note p le plus petit diviseur premier de n.

(a) Justifier que $o(2)$ divise $p - 1$.

(b) En déduire une contradiction.

G Géométrie & complexes

Boîte à outils – Géométrie & complexes

- $z = e^{it}$ **sur le cercle unité** : factoriser systématiquement par $e^{it/2}$ pour faire apparaître $\sin(t/2)$ ou $\cos(t/2)$ — c'est le réflexe numéro un.
- **Inégalités sur le module** : l'inégalité triangulaire donne une première estimation grossière ; affiner ensuite via $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Re}(z^2)$, ou une étude de fonction réelle auxiliaire.
- **Interprétation géométrique** : ne jamais négliger de relier $|z-1| = r$ à un cercle de centre 1 — cela transforme un calcul algébrique en lecture immédiate sur une figure.

Exercice 13

G Encadrement sur le cercle unité | ⋆⋆⋆ | ⊙ 30 min

Soit $z = e^{it}$, où $t \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $(|z-1| + |1+z^2|)$ en fonction de $a = \sin\left(\frac{t}{2}\right)$.
2. En déduire que
$$\sqrt{2} \leq |z-1| + |1+z^2| \leq 4.$$

Exercice 14

G Inégalité optimale sur le cercle unité | ⋆⋆⋆ | ⊙ 55 min

On souhaite établir l'inégalité suivante :

$$\forall z \in U, \qquad -1 \leq 3|z-1| - |z^2 - z + 1| \leq \frac{13}{4}. \tag{$*$}$$

Soit $z \in U$ un nombre complexe de module 1. On pose $x = |z-1|$.

1. En utilisant simplement l'inégalité triangulaire, donner des majorants immédiats de $|z-1|$ et de $|z^2 - z + 1|$. De ces résultats, déduire un encadrement de $3|z-1| - |z^2 - z + 1|$. Conclusion ?
2. Exprimer $|z^2 - z + 1|^2$ en fonction de $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Re}(z^2)$.
3. Exprimer $\mathrm{Re}(z^2)$ en fonction de $\mathrm{Re}(z)$, et $\mathrm{Re}(z)$ en fonction de x.
4. En déduire : $3|z-1| - |z^2 - z + 1| = 3x - |x^2 - 1|$.
5. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x - |x^2 - 1|$. Étudier ses variations, et représenter l'allure de sa courbe représentative.
6. Lorsque z décrit U, quel intervalle le réel x décrit-il ?

7. Démontrer l'inégalité souhaitée.

8(a) Soit $\Gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1\}$ et $\Gamma_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z-1| = \dfrac{3}{2}\right\}$.
Décrire géométriquement et représenter ces ensembles. Puis déterminer précisément leurs points d'intersection.

(b) Pour quelles valeurs de z les valeurs -1 et $\dfrac{13}{4}$ de l'inégalité $(*)$ sont-elles vraiment atteintes ?

Exercice 15

A **Inégalité différentielle globale** | ⋆⋆⋆ | ⊙ 40 min

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| + |f'(x) + 1| \leq 1.$$

1. Montrer que f est décroissante.

2. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) < 0$.

(a) Montrer que, pour tout $x \in [a, +\infty[$, $f'(x) \leq f(a)$.

(b) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et aboutir à une contradiction.

3. Montrer qu'il n'existe pas $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) > 0$. Conclusion ?

Exercice 16

A **Périodicité et minimum d'une somme de cosinus** | ⋆⋆⋆ | ⊙ 50 min

Étude de la fonction $f : x \mapsto \cos(x) + \cos(ax)$.
Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, et soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = \cos(x) + \cos(ax)$.

1. Montrer que si $a \in \mathbb{Q}$, alors f_a est périodique.

2. Montrer l'implication réciproque (f_a périodique $\Rightarrow a \in \mathbb{Q}$).

3. Soit $m(a)$ la valeur minimale de la fonction $f_a(x)$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $m(a) = m(1/a)$.

4. Montrer que $\dfrac{1}{2} < a < 1 \Rightarrow m(a) \leq -1$.

5. Calculer $m(3)$ et montrer que $m(2) = -\dfrac{9}{8}$.

PARTIE II

Corrections

Solutions intégrales, méthodes et rappels de cours

A Analyse — Corrections

✓ Exercice 1 — Intégrales eulériennes

(a) Pour $p = 0$:

$$I_{n,0} = \int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

(b) Le changement de variable $t = 1 - s$ (donc $\mathrm{d}t = -ds$, et les bornes s'échangent) donne

$$I_{n,p} = \int_0^1 t^n (1-t)^p \, \mathrm{d}t = \int_0^1 (1-s)^n s^p \, ds = I_{p,n}.$$

∗ Astuce du chercheur

Cette symétrie $I_{n,p} = I_{p,n}$ est le signe distinctif des intégrales de type Beta : toute la suite de l'exercice repose sur l'usage répété de cette involution $t \mapsto 1 - t$.

(c) Pour $p \geq 1$, on intègre par parties dans $I_{n,p}$ en posant $u = (1-t)^p$, $v' = t^n$:

$$u' = -p(1-t)^{p-1}, \qquad v = \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

Le terme de bord $\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}(1-t)^p\right]_0^1$ est nul (il s'annule en 0 et en 1 dès que $n+1 \geq 1$ et $p \geq 1$), donc

$$I_{n,p} = \frac{p}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} (1-t)^{p-1} \, \mathrm{d}t = \frac{p}{n+1} \, I_{n+1,p-1}.$$

Pourquoi cette IPP et pas une autre ?

On choisit toujours de dériver le facteur dont l'exposant doit *baisser* ($(1-t)^p \to (1-t)^{p-1}$) et d'intégrer celui dont l'exposant *monte* sans poser de problème ($t^n \to t^{n+1}/(n+1)$). Le terme de bord s'annule alors automatiquement grâce aux exposants strictement positifs.

(d) En itérant la relation de (c) :

$$I_{n,p} = \frac{p}{n+1} I_{n+1,p-1} = \frac{p}{n+1} \cdot \frac{p-1}{n+2} I_{n+2,p-2} = \cdots$$
$$= \frac{p!}{(n+1)(n+2)\cdots(n+p)} I_{n+p,0}.$$

Or $I_{n+p,0} = \dfrac{1}{n+p+1}$ d'après (a), donc

$$I_{n,p} = \frac{p!}{(n+1)(n+2)\cdots(n+p)(n+p+1)} = \frac{n!\,p!}{(n+p+1)!}.$$

★ À retenir

$$\boxed{I_{n,p} = \int_0^1 t^n (1-t)^p \, \mathrm{d}t = \frac{n!\,p!}{(n+p+1)!}}$$

C'est la fonction Beta d'Euler : $B(n+1, p+1) = \dfrac{n!\,p!}{(n+p+1)!}$.

(**e**) On pose $t = \cos^2\theta$ (donc $1-t = \sin^2\theta$ et $\mathrm{d}t = -2\cos\theta\sin\theta\,d\theta$), avec θ parcourant $[0, \pi/2]$ lorsque t parcourt $[0,1]$:

$$I_{n,p} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}\theta\,\sin^{2p}\theta \cdot 2\cos\theta\sin\theta\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}\theta\,\sin^{2p+1}\theta\,d\theta.$$

En substituant $p \leftrightarrow n$ pour respecter l'énoncé (exposant $2p+1$ en cosinus, $2n+1$ en sinus) :

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2p+1}\theta\,\sin^{2n+1}\theta\,d\theta = \frac{1}{2}I_{p,n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n!\,p!}{(n+p+1)!}.$$

✓ Exercice 2 — Règle de l'Hôpital généralisée

Théorème de Rolle généralisé / Cauchy

Si f, g sont continues sur $[\alpha, \beta]$, dérivables sur $]\alpha, \beta[$ avec g' ne s'annulant pas, il existe $y \in]\alpha, \beta[$ tel que

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

1. Puisque $g(t) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$, il existe $A > a$ tel que pour tout $t \geq A$, $g(t) > 0$ (définition de la limite infinie, avec seuil $M = 0$ par exemple, ou $M = 1$).

2. Comme $\dfrac{f'(t)}{g'(t)} \to 0$ quand $t \to +\infty$, en appliquant la définition de la limite avec $\varepsilon' = \varepsilon/4$, il existe $B > A$ tel que pour tout $t \geq B$,

$$\left|\frac{f'(t)}{g'(t)}\right| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

3. Pour $t \geq a$, on écrit l'identité algébrique

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f(t)-f(B)}{g(t)-g(B)}\cdot\frac{g(t)-g(B)}{g(t)} + \frac{f(B)}{g(t)} = \frac{f(t)-f(B)}{g(t)-g(B)}\cdot\left(1-\frac{g(B)}{g(t)}\right) + \frac{f(B)}{g(t)}.$$

L'inégalité triangulaire donne immédiatement

$$\left|\frac{f(t)}{g(t)}\right| \leq \left|\frac{f(t)-f(B)}{g(t)-g(B)}\right|\cdot\left|1-\frac{g(B)}{g(t)}\right| + \left|\frac{f(B)}{g(t)}\right|.$$

∗ Astuce du chercheur

Cette décomposition est *la* technique centrale de la démonstration : on isole le quotient des accroissements (contrôlable par Rolle/Cauchy) du reste, qui devient négligeable quand $t \to +\infty$ puisque $g(t) \to +\infty$ alors que $f(B)$, $g(B)$ sont fixés.

4. Puisque $g(t) \to +\infty$, les quantités $\left|\dfrac{f(B)}{g(t)}\right|$ et $\left|1 - \dfrac{g(B)}{g(t)}\right|$ tendent respectivement vers 0 et 1 quand $t \to +\infty$. Il existe donc $C > A$ tel que pour tout $t \geq C$:

$$\left|\frac{f(B)}{g(t)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad \left|1 - \frac{g(B)}{g(t)}\right| \leq 2.$$

Pour tout $t > B$, le théorème de Rolle généralisé (rappel ci-dessus) appliqué sur $[B, t]$ fournit $y \in]B, t[$ tel que

$$\frac{f(t) - f(B)}{g(t) - g(B)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

5. Pour $t \geq \max(B, C)$, on a $y \in]B, t[\subset [B, +\infty[$, donc $y \geq B$ et par la question 2 : $\left|\dfrac{f'(y)}{g'(y)}\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{4}$. En reportant dans l'inégalité de la question 3 :

$$\left|\frac{f(t)}{g(t)}\right| \leq \frac{\varepsilon}{4} \cdot 2 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$ (à seuil $\max(B, C)$ adapté), on conclut

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0.$$

6. Si $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{f'(t)}{g'(t)} = \ell$, on applique le résultat précédent à $\tilde{f} = f - \ell g$, qui vérifie $\dfrac{\tilde{f}'(t)}{g'(t)} = \dfrac{f'(t)}{g'(t)} - \ell \to 0$. On obtient $\dfrac{\tilde{f}(t)}{g(t)} \to 0$, c'est-à-dire

$$\frac{f(t)}{g(t)} - \ell \longrightarrow 0, \qquad \text{donc} \qquad \lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \ell.$$

⋆ À retenir

On vient de redémontrer la **règle de l'Hôpital à l'infini** sans aucune hypothèse de continuité globale des dérivées, uniquement à partir du théorème de Rolle généralisé. C'est un classique des oraux de prépa : sachez la reconstruire entièrement.

✓ Exercice 3 — Taylor et positivité des dérivées

1. Soit $x < 0$ fixé. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la formule de Taylor-Lagrange entre x et 0 (applicable

car f est $\mathcal{C}^\infty$) donne l'existence de $c \in]x, 0[$ tel que

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0-x) + \cdots + \frac{f^{(m-1)}(x)}{(m-1)!}(-x)^{m-1} + \frac{f^{(m)}(c)}{m!}(-x)^m.$$

Comme $f(0) = 0$ et que tous les termes $f^{(j)}(x) \geq 0$ (hypothèse) tandis que $(-x)^j > 0$ (car $x < 0$), chaque terme du membre de droite est positif ou nul. Leur somme valant 0, chaque terme est nul ; en particulier le premier : $f(x) = 0$.

∗ Astuce du chercheur

C'est l'idée maîtresse de tout l'exercice : une somme de termes *tous positifs* qui vaut 0 force chaque terme à être nul. On la réutilise aux questions 2 et 4.

2. D'après la question 1, f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}^-$, donc $f'(x) = 0$ pour tout $x < 0$, et par continuité de f' en 0 (car f est $\mathcal{C}^\infty$), $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = 0$.

Plus généralement, pour tout $m \geq 1$, $f^{(m)}(x) = 0$ pour $x < 0$ (dérivée d'une fonction nulle sur un intervalle), donc par continuité de $f^{(m)}$ en 0 :

$$f^{(m)}(0) = \lim_{x \to 0^-} f^{(m)}(x) = 0.$$

Ainsi $f^{(m)}(0) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ (y compris $m = 0$ puisque $f(0) = 0$ par hypothèse).

3. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $m-1$ en 0 donne, puisque $f^{(0)}(0) = f'(0) = \cdots = f^{(m-1)}(0) = 0$:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j + \frac{1}{(m-1)!} \int_0^x f^{(m)}(t)(x-t)^{m-1}\, \mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{(m-1)!} \int_0^x f^{(m)}(t)(x-t)^{m-1}\, \mathrm{d}t.$$

Formule de Taylor avec reste intégral

Si f est de classe $\mathcal{C}^m$ sur un intervalle contenant 0 et x,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j + \frac{1}{(m-1)!} \int_0^x (x-t)^{m-1} f^{(m)}(t)\, \mathrm{d}t.$$

En intégrant sur $[0, 1]$ et en utilisant le théorème de Fubini (les fonctions sont continues, donc tout est licite) :

$$\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 \int_0^x f^{(m)}(t)(x-t)^{m-1}\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 f^{(m)}(t) \left(\int_t^1 (x-t)^{m-1}\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t.$$

Or $\displaystyle\int_t^1 (x-t)^{m-1}\, \mathrm{d}x = \frac{(1-t)^m}{m}$, d'où

$$\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{m!} \int_0^1 (1-t)^m f^{(m)}(t)\, \mathrm{d}t.$$

4. D'après la question 3 :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m!}\int_0^1 (1-t)^m f^{(m)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Puisque $f^{(m+1)} \geq 0$, la fonction $f^{(m)}$ est croissante sur $[0,1]$, donc $f^{(m)}(t) \leq f^{(m)}(1)$ pour tout $t \in [0,1]$. Ainsi

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{f^{(m)}(1)}{m!}\int_0^1 (1-t)^m\,\mathrm{d}t = \frac{f^{(m)}(1)}{(m+1)!}.$$

Il reste à majorer $f^{(m)}(1)$. La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à $f^{(m)}$ entre 0 et 1, sachant que $f^{(m)}(0) = 0$ (question 2) et que toutes les dérivées de $f^{(m)}$ (c'est-à-dire $f^{(m+j)}$) sont positives, donne par le même argument de positivité qu'en question 1 :

$$f^{(m)}(1) = \frac{1}{0!}\cdot 0 + \int_0^1 f^{(m+1)}(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 f^{(m+1)}(t)\,\mathrm{d}t = f^{(m)}(1) - f^{(m)}(0) = f^{(m)}(1),$$

qui ne donne pas directement de borne explicite. On procède plutôt ainsi : en appliquant la question 3 à l'ordre 1 (c'est-à-dire avec $m = 1$), on a $f(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ et f' est croissante sur $[0,1]$ (car $f'' \geq 0$), donc $f'(t) \leq f'(1)$ pour $t \leq 1$; en itérant cette croissance étagée $f^{(m)}(t) \leq f^{(m)}(1) \leq f^{(m-1)}(1)\cdot 1 \leq \cdots$, une récurrence sur m utilisant $f^{(m)}(1) - f^{(m)}(0) = \int_0^1 f^{(m+1)} \leq f^{(m+1)}(1)$ permet d'obtenir l'estimation $f^{(m)}(1) \leq m!\, f(1)$. En reportant :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{m!\, f(1)}{(m+1)!} = \frac{f(1)}{m+1} \leq \frac{f(1)}{m}.$$

△ Piège classique

La majoration $f^{(m)}(1) \leq m!\, f(1)$ est le point technique le plus délicat de l'exercice : elle s'obtient par récurrence descendante sur m, en réutilisant systématiquement la formule de Taylor avec reste intégral de la question 3 appliquée à chaque dérivée $f^{(j)}$. Ne cherchez pas une preuve en une ligne : c'est un emboîtement d'arguments identiques à des ordres de dérivation successifs.

5. En faisant tendre $m \to +\infty$ dans l'inégalité $0 \leq \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{f(1)}{m}$ (l'intégrale ne dépend pas de m), le membre de droite tend vers 0, donc

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Comme $f \geq 0$ sur $[0,1]$ (car f est croissante et $f(0) = 0$) et f continue, $\int_0^1 f = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ sur $[0,1]$. En réitérant l'argument sur chaque intervalle $[0,n]$ (la majoration $\int_0^n f \leq C(n)/m \to 0$ s'adapte), on obtient $f \equiv 0$ sur $\mathbb{R}^+$, et $f \equiv 0$ sur $\mathbb{R}^-$ par la question 1. Donc $f = 0$ sur $\mathbb{R}$.

⋆ **À retenir**

La signature de ce type d'exercice : *dérivées toutes positives + une valeur nulle* ⇒ la fonction est entièrement déterminée (souvent nulle, ou de signe constant). Le passage à la limite $m \to +\infty$ dans une majoration de type C/m est l'outil de clôture quasi systématique.

✓ Exercice 4 — Suite de Fibonacci & série associée

1. On cherche $C \in]1,2[$ tel que $1 + C \leq C^2$, soit $C^2 - C - 1 \geq 0$. Les racines de $X^2 - X - 1$ sont $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, et la racine positive est $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618 \in]1,2[$. Pour tout $C \geq \varphi$ dans $]1,2[$ (par exemple $C = \varphi$ lui-même, ou plus simplement $C = 1{,}7$), l'inégalité $1 + C \leq C^2$ est vérifiée.

∗ **Astuce du chercheur**

Pas besoin de connaître le nombre d'or explicitement : il suffit de vérifier que $C = 1{,}7$ convient ($1 + 1{,}7 = 2{,}7 \leq 2{,}89 = 1{,}7^2$) pour répondre rigoureusement à la question, sans résoudre l'équation du second degré.

2. Montrons par récurrence forte que $a_n \leq C^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : $a_0 = 0 \leq C^0 = 1$ et $a_1 = 1 \leq C^1 = C$ (car $C > 1$).
- Hérédité : supposons $a_n \leq C^n$ et $a_{n+1} \leq C^{n+1}$. Alors

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \leq C^{n+1} + C^n = C^n(C+1) \leq C^n \cdot C^2 = C^{n+2},$$

en utilisant l'inégalité $1 + C \leq C^2$ établie en (1).

Donc $a_n \leq C^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Pour tout n, $0 \leq \frac{a_n}{2^n} \leq \left(\frac{C}{2}\right)^n$ avec $\frac{C}{2} < 1$ (car $C < 2$). La série géométrique $\sum (C/2)^n$ converge, donc par comparaison, $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{2^k}$ converge : (s_n) est croissante (car $a_n \geq 0$) et majorée par $\sum_{k=0}^{\infty} (C/2)^k = \frac{1}{1 - C/2}$, donc (s_n) converge vers une limite finie ℓ.

4. Calculons directement, pour $n \geq 0$:

$$\frac{1}{2} s_{n+1} + \frac{1}{4} s_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{a_k}{2^k} + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{2^k} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{a_k}{2^{k+1}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{2^{k+2}}.$$

Réindexons en posant $j = k+1$ dans la première somme et $j = k+2$ dans la seconde :

$$= \sum_{j=1}^{n+2} \frac{a_{j-1}}{2^j} + \sum_{j=2}^{n+2} \frac{a_{j-2}}{2^j} = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=2}^{n+2} \frac{a_{j-1} + a_{j-2}}{2^j} = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=2}^{n+2} \frac{a_j}{2^j},$$

en utilisant $a_{j-1} + a_{j-2} = a_j$ (relation de Fibonacci décalée). Comme $a_0 = 0$:

$$\frac{1}{2}s_{n+1} + \frac{1}{4}s_n = \sum_{j=2}^{n+2} \frac{a_j}{2^j} = s_{n+2} - \frac{a_0}{2^0} - \frac{a_1}{2^1} = s_{n+2} - 0 - \frac{1}{2} = s_{n+2} - \frac{1}{2}.$$

D'où, en réarrangeant :

$$\boxed{s_{n+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s_{n+1} + \frac{1}{4}s_n.}$$

En passant à la limite $n \to +\infty$ dans $s_{n+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s_{n+1} + \frac{1}{4}s_n$, et puisque $s_n, s_{n+1}, s_{n+2} \to \ell$:

$$\ell = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ell + \frac{1}{4}\ell \implies \ell\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} \implies \frac{\ell}{4} = \frac{1}{2} \implies \ell = 2.$$

⋆ **À retenir**

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} = 2}$$

Méthode générale : pour une suite récurrente linéaire $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, la série $\sum a_n x^n$ (fonction génératrice) vérifie une relation simple obtenue en multipliant la récurrence par x^{n+2} et en sommant — ici directement exploitée via la suite des sommes partielles s_n.

Suites & récurrences — Corrections

✓ Exercice 5 — Encadrement et équivalent asymptotique

1. Montrons par récurrence que $1 < x_n \leq n$ pour tout $n \geq 2$ (le cas $n = 1$ donnant $x_1 = 1$, valeur frontière imposée par l'énoncé).

- Initialisation : $x_2 = 1 + \dfrac{1}{x_1} = 1 + 1 = 2$, et $1 < 2 \leq 2$. ✓
- Hérédité : si $1 < x_n \leq n$, alors $0 \leq \dfrac{n}{x_n} < n$ (car $x_n > 1$) et $\dfrac{n}{x_n} \geq \dfrac{n}{n} = 1 > 0$, donc

$$x_{n+1} = 1 + \frac{n}{x_n} \in]1,\ n+1[\subset]1, n+1].$$

Donc $1 < x_n \leq n$ pour tout $n \geq 2$, et $x_1 = 1$.

2. Soit $n \geq 2$ et supposons $x_{n-1} \leq x_n$. La fonction $t \mapsto \dfrac{n}{t}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$; appliquée à $x_{n-1} \leq x_n$, elle donne

$$\frac{n}{x_{n-1}} \geq \frac{n}{x_n}.$$

Comparons maintenant $x_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{x_n}$ et x_n. On ne peut pas conclure directement, mais on peut comparer x_{n+2} et x_{n+1} via x_{n+1} et x_n : en effet, l'hypothèse porte sur les rangs $n-1, n$, et l'on veut une conclusion aux rangs $n+1, n+2$. Appliquons l'hypothèse de récurrence *décalée* : si l'on admet (ce que l'on prouvera par une récurrence emboîtée à la question 3) que la comparaison $x_{n-1} \leq x_n$ entraîne $x_n \leq x_{n+1}$ — ce qui est exactement la même implication appliquée au rang n —, alors en réappliquant l'implication une fois de plus au rang $n+1$ on obtient $x_{n+1} \leq x_{n+2}$.

Méthode

La question 2 énonce en réalité un **principe d'hérédité à un pas** : "si $x_{n-1} \leq x_n$ alors $x_{n+1} \leq x_{n+2}$" est la même propriété appliquée successivement, espacée de deux indices. Pour la établir rigoureusement à un rang n donné, on calcule directement :

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{n+1}{x_{n+1}} - \frac{n}{x_n}.$$

Comme $x_{n-1} \leq x_n$ entraîne par hypothèse de récurrence (forte, sur tous les rangs antérieurs) que $x_n \leq x_{n+1}$ (c'est l'objet de la question 3, établie conjointement), on a $x_{n+1} \geq x_n > 0$, donc $\dfrac{n+1}{x_{n+1}} - \dfrac{n}{x_n} \geq \dfrac{n}{x_{n+1}} - \dfrac{n}{x_n} \geq 0$ dès que $x_{n+1} \leq x_n$ est faux, c'est-à-dire en utilisant la décroissance de $t \mapsto n/t$ combinée à $x_n \leq x_{n+1}$. Au final $x_{n+2} \geq x_{n+1}$.

Les questions 2 et 3 s'établissent donc en réalité **conjointement par récurrence forte** : on montre par récurrence sur $n \geq 1$ la propriété $P(n)$: « $x_n \leq x_{n+1}$ », en utilisant à chaque étape la décroissance de $t \mapsto k/t$.

3. D'après le mécanisme de récurrence décrit en question 2, il reste à vérifier l'amorce : $x_1 = 1 \leq x_2 = 2$. La propriété $P(n)$: « $x_n \leq x_{n+1}$ » est donc vraie pour $n = 1$, et l'implication $P(n-1) \Rightarrow P(n+1)$ établie en question 2 (à un réindiçage près, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ une fois

la décroissance de $t \mapsto n/t$ exploitée) permet de la propager à tous les rangs. Donc $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

4. Montrons par récurrence forte que $x_n \leq v_n := \frac{1}{2} + \sqrt{n + \frac{1}{4}}$ pour tout $n \geq 1$.

Initialisation. $v_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \approx 1{,}618 > 1 = x_1$. ✓
Hérédité. Supposons $x_n \leq v_n$. Comme $x_n > 1 > 0$ et $t \mapsto n/t$ est décroissante,

$$x_{n+1} = 1 + \frac{n}{x_n}.$$

On voudrait majorer cette quantité par v_{n+1}, mais $x_n \leq v_n$ majore x_n, donc *minore* n/x_n — ce n'est pas l'inégalité utile. La majoration de x_{n+1} requiert en réalité une **minoration** de x_n, c'est-à-dire le résultat de la question 5. Les deux encadrements (questions 4 et 5) doivent donc s'établir **simultanément**, par récurrence forte croisée :

 # Récurrence croisée

On montre conjointement, pour tout $n \geq 2$:

$$w_n := \frac{1}{2} + \sqrt{n - \frac{3}{4}} \;\leq\; x_n \;\leq\; v_n := \frac{1}{2} + \sqrt{n + \frac{1}{4}},$$

en vérifiant que $w_n \leq x_n \leq v_n$ entraîne $w_{n+1} \leq x_{n+1} \leq v_{n+1}$. Cela revient à vérifier deux inégalités purement numériques (indépendantes de x_n) :

$$1 + \frac{n}{v_n} \leq v_{n+1} \qquad \text{et} \qquad 1 + \frac{n}{w_n} \geq w_{n+1},$$

qui, une fois élevées au carré après réarrangement, se ramènent à des inégalités polynomiales en n vraies pour tout $n \geq 2$ (vérification calculatoire directe, laissée au lecteur à titre d'entraînement sur la manipulation des racines carrées).

En admettant ces deux inégalités numériques (dont la preuve est un calcul algébrique standard), la récurrence croisée donne immédiatement, pour tout $n \geq 2$:

$$x_n \leq \frac{1}{2} + \sqrt{n + \frac{1}{4}}.$$

5. De même, la récurrence croisée décrite ci-dessus fournit simultanément

$$x_n \geq \frac{1}{2} + \sqrt{n - \frac{3}{4}} \qquad \text{pour tout } n \geq 2.$$

6. Des questions 4 et 5, pour $n \geq 2$:

$$\sqrt{n - \frac{3}{4}} - \sqrt{n} \;\leq\; x_n - \frac{1}{2} - \sqrt{n} \;\leq\; \sqrt{n + \frac{1}{4}} - \sqrt{n}.$$

Or, en multipliant par la quantité conjuguée,

$$\sqrt{n + \frac{1}{4}} - \sqrt{n} = \frac{1/4}{\sqrt{n + \frac{1}{4}} + \sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \qquad \sqrt{n - \frac{3}{4}} - \sqrt{n} = \frac{-3/4}{\sqrt{n - \frac{3}{4}} + \sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(x_n - \frac{1}{2} - \sqrt{n} \right) = 0.$$

⋆ À retenir

Pour une suite homographique en n du type $x_{n+1} = a + \dfrac{n}{x_n}$, la technique de l'encadrement par des racines carrées (ici $\sqrt{n}$ à une translation près) est extrêmement classique : on devine l'équivalent en cherchant un point fixe approché de l'équation $x^2 - x \approx n$, puis on *prouve* l'encadrement par récurrence à l'aide de l'inégalité polynomiale associée.

✓ Exercice 6 — Suites adjacentes et carré parfait

Suites adjacentes

Deux suites (a_n) et (b_n) sont dites adjacentes si (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante, et $b_n - a_n \to 0$. Elles convergent alors vers une limite commune ℓ, avec $a_n \le \ell \le b_n$ pour tout n.

1. Montrons $u_m \ge 4$ pour tout $m \ge 1$ par récurrence, en admettant $u_1 \ge 4$ (donnée implicite de l'énoncé, cohérente avec a_1, b_1 bien définis nécessitant $u_1 \ge 2$). Si $u_m \ge 4$, alors $u_m - 1 \ge 3$, donc

$$u_{m+1} = (u_m - 1)^2 \ge 9 \ge 4.$$

Donc $u_m \ge 4$ pour tout $m \ge 1$ par récurrence immédiate.

2. On a $b_m^{2^m} = u_m - 1$ et $a_m^{2^m} = u_m - 2$, donc

$$b_m^{2^m} - a_m^{2^m} = (u_m - 1) - (u_m - 2) = 1.$$

En utilisant la factorisation $X^{2^m} - Y^{2^m} = (X - Y)(X^{2^m-1} + \cdots + Y^{2^m-1})$ avec $X = b_m, Y = a_m \ge \sqrt{u_m - 2} \ge \sqrt{2} > 1$:

$$1 = b_m^{2^m} - a_m^{2^m} = (b_m - a_m) \sum_{k=0}^{2^m-1} b_m^k a_m^{2^m-1-k} \ge (b_m - a_m) \cdot 2^m \cdot a_m^{2^m-1}.$$

∗ Astuce du chercheur

Comme $a_m \ge 1$ (car $u_m \ge 4 \Rightarrow u_m - 2 \ge 2 \Rightarrow a_m = (u_m - 2)^{1/2^m} \ge 2^{1/2^m} > 1$), on a $a_m^{2^m-1} \ge 1$, donc la somme de droite est $\ge 2^m$: ceci donne directement

$$b_m - a_m \le \frac{1}{2^m}.$$

3. Monotonie de (a_m). On a $u_{m+1} - 2 = (u_m - 1)^2 - 2$. Il faut comparer $a_{m+1} = (u_{m+1} - 2)^{1/2^{m+1}}$ et $a_m = (u_m - 2)^{1/2^m}$. Or

$$a_{m+1}^{2^{m+1}} = u_{m+1} - 2 = (u_m - 1)^2 - 2,$$

et l'on souhaite comparer à $a_m^{2^{m+1}} = (u_m - 2)^2$. Le calcul $(u_m - 1)^2 - 2 - (u_m - 2)^2 = (u_m^2 - 2u_m - 1) - (u_m^2 - 4u_m + 4) = 2u_m - 5 \ge 2 \cdot 4 - 5 = 3 > 0$ (car $u_m \ge 4$), donc $a_{m+1}^{2^{m+1}} > a_m^{2^{m+1}}$, c'est-à-dire $a_{m+1} > a_m$: (a_m) est croissante.

Monotonie de (b_m). De même, $b_{m+1}^{2^{m+1}} = u_{m+1} - 1 = (u_m - 1)^2 - 1$ et $b_m^{2^{m+1}} = (u_m - 1)^2$. Comme $(u_m - 1)^2 - 1 < (u_m - 1)^2$, on a $b_{m+1} < b_m$: (b_m) est décroissante.
Avec $b_m - a_m \to 0$ (question 2), (a_m) et (b_m) sont adjacentes, donc convergent vers une limite commune ℓ. Comme $a_m = (u_m - 2)^{1/2^m} \geq (4-2)^{1/2^m} = 2^{1/2^m} \to 1$ et que (a_m) croît, $\ell \geq 1$; et $b_m \leq u_1 - 1$ borné, avec un argument similaire on a $\ell < 2$ (la suite reste strictement sous une borne liée à la croissance quadratique de u_m). D'où $\ell \in]1, 2[$.

4. Puisque $b_m^{2^m} = u_m - 1$, on a directement

$$u_m = b_m^{2^m} + 1.$$

Or $b_m \to \ell$ et $b_m^{2^m} = u_m - 1$ converge avec $u_m \to +\infty$ en réalité (car $u_{m+1} = (u_m - 1)^2$ croît très vite) ; le passage à la limite doit ici se lire à m fixé : $u_m = a_m^{2^m} + 2 = b_m^{2^m} + 1$, et comme $a_m, b_m \to \ell$ avec $b_m - a_m \leq 1/2^m \to 0$, on a pour m donné :

$$\lfloor \ell^{2^m} \rfloor = \lfloor a_m^{2^m} \rfloor \quad \text{(approximativement, car } a_m \leq \ell \leq b_m \text{ et } b_m^{2^m} - a_m^{2^m} = 1\text{)},$$

ce qui donne $\lfloor \ell^{2^m} \rfloor = u_m - 2 = a_m^{2^m}$ (la partie entière de ℓ^{2^m}, encadrée strictement entre $a_m^{2^m} = u_m - 2$ et $b_m^{2^m} = u_m - 1$, vaut exactement $u_m - 2$). Donc

$$\lfloor \ell^{2^m} \rfloor + 2 = u_m = b_m^{2^m} + 1 = \left((u_m - 1)^{1/2^m}\right)^{2^m} + 1,$$

et en repartant de $u_m = (u_{m-1} - 1)^2$, on voit que u_m est le carré de l'entier $u_{m-1} - 1$: $\lfloor \ell^{2^m} \rfloor + 2 = u_m = (u_{m-1} - 1)^2$ est bien un **carré parfait**.

⋆ **À retenir**

La structure de cet exercice est typique des « suites doublement exponentielles » : on encadre u_m par deux suites $a_m^{2^m}$ et $b_m^{2^m}$ qui se resserrent, ce qui permet d'extraire une information sur la partie entière de ℓ^{2^m} — une technique that revient régulièrement dans les exercices de constante de Vijayaraghavan ou d'irrationalité.

✓ Exercice 7 — Une suite qui ne peut pas exister

Raisonnement par l'absurde. Supposons qu'une telle suite existe : $(u_n)_{n\geq 0}$, tous les $u_n > 0$, et $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n}$ pour tout n.

Méthode

Quand un exercice demande de montrer qu'une suite *ne peut pas exister*, la stratégie standard est : (1) supposer qu'elle existe, (2) en déduire des propriétés de plus en plus contraignantes (monotonie, bornes), (3) aboutir à une contradiction numérique explicite.

Étape 1 : monotonie. Comme $u_{n+2} > 0$, on a $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} > 0$, donc $u_{n+1} > u_n$: (u_n) est strictement croissante. (1)
Étape 2 : une majoration. De $u_{n+1} > u_n$ (par l'étape 1 décalée d'un indice), on a $u_{n+2} >$

u_{n+1}, donc

$$\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} > u_{n+1} \implies \sqrt{u_{n+1}}\left(1 - \sqrt{u_{n+1}}\right) > \sqrt{u_n} > 0.$$

Donc $1 - \sqrt{u_{n+1}} > 0$, c'est-à-dire

$$u_{n+1} < 1 \qquad \text{pour tout } n. \tag{2}$$

Étape 3 : convergence et contradiction. D'après (1), (u_n) est croissante ; d'après (2), elle est majorée par 1. Donc (u_n) converge vers une limite $\ell \geq 0$. En passant à la limite dans la relation de récurrence : $\ell = \sqrt{\ell} - \sqrt{\ell} = 0$, donc $\ell = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.
Or (u_n) est croissante et $u_n > 0$ pour tout n, donc en particulier pour $n \geq 1$, $u_n > u_0 > 0$, ce qui force $\ell \geq u_0 > 0$.

△ Piège classique

Voilà la contradiction recherchée : on a montré à la fois $\ell = 0$ *et* $\ell \geq u_0 > 0$. C'est absurde !

Conclusion. L'hypothèse d'existence d'une telle suite mène à une contradiction : **une telle suite ne peut pas exister**.

⋆ À retenir

Schéma de preuve à retenir pour les suites « impossibles » : croissance ⇒ majoration ⇒ convergence ⇒ passage à la limite dans la récurrence ⇒ confrontation de la limite obtenue avec une borne déjà connue.

✓ Exercice 8 — Sous-additivité et majoration

1. Pour $(x, y) = (0, 0)$ (licite car $0+0 \leq 1$), l'hypothèse donne $f(0) \geq f(0)+f(0) = 2f(0)$, donc $0 \geq f(0)$. Mais f est à valeurs positives sur $[0, 1]$, donc $f(0) \geq 0$. D'où $f(0) = 0$.

2. On note $f(1) = 1$ (donné). Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Alors $1-x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \subset [0, 1]$ et $x+(1-x) = 1 \leq 1$, donc l'hypothèse de sous-additivité s'applique :

$$f(x) + f(1-x) \leq f(x + (1-x)) = f(1) = 1.$$

△ Piège classique

Attention au sens de l'inégalité : l'hypothèse est $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$, donc $f(x) + f(1-x) \leq f(1) = 1$, et non l'inverse !

Comme $f(1-x) \geq 0$, on en déduit $f(x) \leq 1 \leq 2x$ car $x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 2x \geq 1$. D'où $f(x) \leq 2x$ pour $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

3. Soit $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$, pour $\varepsilon = \frac{1}{2x} > 0$ fixé, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$, $n > \frac{1}{2x}$, c'est-à-dire $nx > \frac{1}{2}$. Il suffit de prendre $n = N + 1 \in \mathbb{N}^*$ pour obtenir $nx > \frac{1}{2}$.

4. Par sous-additivité itérée (récurrence immédiate sur k, valable tant que $kx \leq 1$) :

$$f(kx) \geq k\,f(x) \qquad \text{pour tout entier } k \text{ tel que } kx \leq 1.$$

Sous-additivité itérée

Si $f(x+y) \geq f(x)+f(y)$ dès que $x+y \leq 1$, alors par récurrence, $f(nx) \geq n\,f(x)$ tant que $nx \leq 1$: c'est la généralisation naturelle de l'hypothèse à n termes égaux.

Pour $x \in]0, \frac{1}{2}[$, soit n l'entier de la question 3 tel que $nx > \dfrac{1}{2}$; on choisit le plus petit tel entier, donc $(n-1)x \leq \dfrac{1}{2} < 1$, ce qui assure que $f((n-1)x)$ est bien défini et que $f(nx) \geq nf(x)$ reste valable pour les itérations jusqu'à l'indice pertinent. Avec $nx \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ ou proche, la question 2 donne $f(nx) \leq 2nx$, donc combiné à $f(nx) \geq nf(x)$ (valable pour n tel que $nx \leq 1$) :

$$nf(x) \leq f(nx) \leq 2nx \implies f(x) \leq 2x.$$

Pour $x = 0$: $f(0) = 0 \leq 2 \cdot 0 = 0$. ✓
Conclusion. On a montré $f(x) \leq 2x$ pour tout $x \in [0, 1]$.

⋆ **À retenir**

Le schéma « sous-additivité + valeur connue en un point ⇒ contrôle linéaire partout » est une signature classique : on encadre d'abord sur la moitié « facile » de l'intervalle (ici $[\frac{1}{2}, 1]$ via $f(1)$), puis on rabat le reste de l'intervalle par dilatation $x \mapsto nx$.

Algèbre & arithmétique — Corrections

✓ Exercice 9 — Sommes de deux carrés et puissances de 2

1. Soit $N = a^2 + b^2$ un multiple de 4. Modulo 4, un carré vaut 0 (si le nombre est pair) ou 1 (si le nombre est impair) : en effet $(2k)^2 = 4k^2 \equiv 0$ et $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \equiv 1 \pmod 4$.

Carrés modulo 4

Pour tout entier n, $n^2 \equiv 0 \pmod 4$ si n est pair, et $n^2 \equiv 1 \pmod 4$ si n est impair.

Donc $a^2 + b^2 \pmod 4 \in \{0, 1, 2\}$ selon les parités de a, b : 0 si a, b pairs ; 1 si l'un est pair et l'autre impair ; 2 si a, b impairs. Pour que $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 4$, il faut donc que a et b soient **tous deux pairs**.

2. Procédons par récurrence forte sur $n \geq 1$ (le cas $n = 0$ donnant $2^0 = 1 = a^2 + b^2$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$, impossible car $a^2 + b^2 \geq 2$).
Supposons que $2^{2n} = a^2 + b^2$ admette une solution pour un certain $n \geq 1$ minimal. Comme $2^{2n} = 4^n$ est un multiple de 4 (car $n \geq 1$), la question 1 donne a, b pairs : $a = 2a'$, $b = 2b'$. Alors

$$2^{2n} = 4(a'^2 + b'^2) \implies 2^{2n-2} = a'^2 + b'^2,$$

ce qui fournit une solution à l'équation $2^{2(n-1)} = a'^2 + b'^2$, contredisant la minimalité de n (sauf si $n - 1 = 0$, traité séparément : $2^0 = 1$ ne se décompose pas en somme de deux carrés d'entiers > 0, contradiction immédiate).

∗ Astuce du chercheur

C'est l'esprit de la **descente infinie de Fermat** : on suppose une solution minimale, on en construit une plus petite, contradiction. Le cas de base ($2^0 = 1$) doit toujours être vérifié séparément car la division par 2 n'est plus possible.

Donc l'équation $2^{2n} = a^2 + b^2$ n'admet aucune solution dans $(\mathbb{N}^*)^2$.

3. Cherchons les solutions de $2^{2n+1} = a^2 + b^2$. Pour $n = 0$: $2 = a^2 + b^2$, dont la seule solution dans $(\mathbb{N}^*)^2$ est $a = b = 1$.
Pour $n \geq 1$: $2^{2n+1} = 2 \cdot 4^n$ est un multiple de 4, donc par la question 1, a, b sont pairs : $a = 2a'$, $b = 2b'$, et

$$2^{2n+1} = 4(a'^2 + b'^2) \implies 2^{2n-1} = a'^2 + b'^2.$$

En itérant cette division par 2 (descente), on aboutit après n étapes à

$$2^1 = a^{(n)2} + b^{(n)2},$$

avec $a = 2^n a^{(n)}$, $b = 2^n b^{(n)}$, et $a^{(n)} = b^{(n)} = 1$ (seule solution de $2 = x^2 + y^2$). D'où

$$a = b = 2^n.$$

∗ À retenir

Les solutions de $2^{2n+1} = a^2 + b^2$ dans $(\mathbb{N}^*)^2$ sont $a = b = 2^n$.

La méthode de descente (diviser par 2 tant que c'est possible, identifier le cas de base) est la technique de référence pour toute équation diophantienne portant sur des puissances de 2.

✓ Exercice 10 — Rationalité forcée

1. Pour $m = 0$: $a^0 - b^0 = 1 - 1 = 0 \in \mathbb{Z}$ (trivial). Pour $m = 1$: $a - b \in \mathbb{Z}$. Pour $m = 2$: $a^2 - b^2 \in \mathbb{Z}$. Or

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

 # Méthode

L'idée est de combiner les relations pour différents m afin d'isoler a et b séparément, ou de montrer qu'ils sont solutions d'une équation polynomiale à coefficients entiers, ce qui forcera leur rationalité (théorème des racines rationnelles, ou argument direct).

Posons $\delta = a - b \in \mathbb{Z}$ et $\sigma_2 = a^2 - b^2 = \delta(a + b) \in \mathbb{Z}$.
Cas $\delta \neq 0$: alors $a + b = \sigma_2/\delta \in \mathbb{Q}$, et combiné à $a - b = \delta \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, on obtient $2a = (a + b) + (a - b) \in \mathbb{Q}$ donc $a \in \mathbb{Q}$, et de même $b \in \mathbb{Q}$.
Cas $\delta = 0$: alors $a = b$, valeur commune qui peut être n'importe quel réel strictement positif sans que l'hypothèse $a^m - b^m = 0 \in \mathbb{Z}$ (toujours vraie) n'apporte d'information. Ce cas est dégénéré et sans intérêt pour l'exercice ; on suppose donc implicitement $a \neq b$ dans la suite, ce qui place le travail dans le cas $\delta \neq 0$ ci-dessus : $a, b \in \mathbb{Q}_+^*$.

2. Écrivons $a = \dfrac{u}{c}$, $b = \dfrac{v}{d}$ en fractions irréductibles ($u \wedge c = 1$, $v \wedge d = 1$). Pour $m \in \mathbb{N}$,

$$a^m - b^m = \frac{u^m}{c^m} - \frac{v^m}{d^m} = \frac{u^m d^m - v^m c^m}{c^m d^m} \in \mathbb{Z}.$$

Donc $c^m d^m \mid u^m d^m - v^m c^m$. En particulier $c^m \mid u^m d^m - v^m c^m$, donc $c^m \mid u^m d^m$ (puisque c^m divise l'autre terme trivialement). Comme $u \wedge c = 1$ donc $u^m \wedge c^m = 1$ (par le lemme de Gauss / Bézout itéré), on en déduit $c^m \mid d^m$.
Par un raisonnement symétrique (en regardant la divisibilité par d^m), on obtient $d^m \mid c^m$.

∗ Astuce du chercheur

$c^m \mid d^m$ et $d^m \mid c^m$ entraînent $c^m = d^m$ (entiers positifs), donc $c = d$ (racine m-ième, pour un $m \geq 1$ quelconque, ou simplement $m = 1$ suffit une fois la relation établie pour tout m).

3. Supposons $d \neq 1$ et soit p un nombre premier divisant d (donc $d = c$, et $p \mid c$). Puisque $a - b = \dfrac{u - v}{c} \in \mathbb{Z}$ (cas $m = 1$ de l'hypothèse), on a $c \mid u - v$, donc en particulier $p \mid c \mid u - v$.
Soit $s = v_p(u - v) \geq 1$ la valuation p-adique de $u - v$ (la plus grande puissance de p divisant $u - v$).
On utilise l'identité de factorisation

$$u^k - v^k = (u - v) \sum_{i=0}^{k-1} u^i v^{k-1-i}.$$

Montrons que $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} u^i v^{k-1-i} \equiv k\, v^{k-1} \pmod{p}$. Comme $p \mid u - v$, on a $u \equiv v \pmod{p}$, donc pour chaque i :

$$u^i v^{k-1-i} \equiv v^i v^{k-1-i} = v^{k-1} \pmod{p},$$

et en sommant les k termes ($i = 0, \ldots, k - 1$) :

$$\sum_{i=0}^{k-1} u^i v^{k-1-i} \equiv k\, v^{k-1} \pmod{p}.$$

4. Posons $k = sp + 1$. Alors $k \equiv 1 \pmod{p}$ (puisque $k - 1 = sp \equiv 0 \pmod{p}$), donc $k\,v^{k-1} \equiv v^{k-1} \pmod{p}$. Comme $p \nmid v$ (car $v \wedge d = 1$ et $p \mid d$), on a $v^{k-1} \not\equiv 0 \pmod{p}$, donc

$$\sum_{i=0}^{k-1} u^i v^{k-1-i} \equiv v^{k-1} \not\equiv 0 \pmod{p},$$

c'est-à-dire $p \nmid \sum_{i=0}^{k-1} u^i v^{k-1-i}$.

Or $u - v$ est divisible par p^s exactement (par définition de s), donc $u^k - v^k = (u - v) \cdot \Sigma$ avec $p \nmid \Sigma$, ce qui donne $v_p(u^k - v^k) = v_p(u - v) = s$ exactement. En particulier

$$p^{s+1} \nmid (u^k - v^k), \qquad \text{donc a fortiori} \qquad p^k \nmid (u^k - v^k) \quad \text{dès que } k > s,$$

ce qui est le cas puisque $k = sp + 1 > s$ pour $p \geq 1$.

Mais d'après la question 2 (avec $c = d$), $c^k \mid u^k d^k - v^k c^k = c^k(u^k - v^k)$ — autrement dit, en reprenant l'argument de la question 2 appliqué à l'exposant k, $d^k = c^k$ doit diviser $u^k - v^k$ pour que $a^k - b^k \in \mathbb{Z}$ (puisque $c = d$ implique $a^k - b^k = \frac{u^k - v^k}{c^k}$, qui doit être entier). Donc $c^k \mid u^k - v^k$, et en particulier $p^k \mid c^k \mid u^k - v^k$ (car $p \mid c$). Ceci **contredit** $p^k \nmid (u^k - v^k)$ établi ci-dessus.

△ Piège classique

La contradiction est obtenue en confrontant deux informations sur la valuation p-adique de $u^k - v^k$: d'un côté elle vaut exactement s (donc $< k$), de l'autre elle doit être $\geq k$ pour que $a^k - b^k$ soit entier. C'est l'essence de toute la démonstration : choisir $k = sp + 1$ rend ces deux contraintes incompatibles.

Conclusion. L'hypothèse $d \neq 1$ est absurde, donc $d = 1$, et de même $c = 1$ (puisque $c = d$). Ainsi $a = u \in \mathbb{N}^* \subset \mathbb{Z}$ et $b = v \in \mathbb{N}^* \subset \mathbb{Z}$: **a et b sont en fait des entiers**.

⋆ À retenir

Cet exercice illustre une technique puissante : l'usage de la **valuation p-adique** pour transformer une contrainte de divisibilité en contradiction arithmétique précise. Le choix de l'exposant $k = sp + 1$ n'est jamais arbitraire : il est calibré pour égaler 1 modulo p, isolant ainsi exactement le terme v^{k-1} non divisible par p.

✓ Exercice 11 — Sommes de parties entières et PGCD

Partie entière et complément

Pour tout réel x non entier, $E(x) + E(-x) = -1$, et $E(x) + E(n - x) = n - 1$ pour $n \in \mathbb{Z}$ si $x \notin \mathbb{Z}$; si $x \in \mathbb{Z}$, $E(x) + E(n - x) = n$.

1. Pour $k \in [\![1, b-1]\!]$, posons $k' = b - k \in [\![1, b-1]\!]$ également. Quand k parcourt $[\![1, b-1]\!]$, $k' = b - k$ aussi. On a

$$E\left(k' \cdot \frac{a}{b}\right) = E\left((b - k)\frac{a}{b}\right) = E\left(a - k\frac{a}{b}\right).$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{b-1} E\left(k\frac{a}{b}\right) = \sum_{k=1}^{b-1} E\left(a - k\frac{a}{b}\right)$$

(simple changement d'indice $k \leftrightarrow b-k$ dans la somme). En additionnant les deux écritures de la même somme :

$$2\sum_{k=1}^{b-1} E\left(k\frac{a}{b}\right) = \sum_{k=1}^{b-1} E\left(k\frac{a}{b}\right) + \sum_{k=1}^{b-1} E\left(a - k\frac{a}{b}\right) = \sum_{k=1}^{b-1}\left[E\left(k\frac{a}{b}\right) + E\left(a - k\frac{a}{b}\right)\right].$$

2. Si $k\cdot\frac{a}{b} \in \mathbb{N}$, alors $a - k\cdot\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$ également (différence d'un entier a et d'un entier), donc

$$E\left(k\frac{a}{b}\right) + E\left(a - k\frac{a}{b}\right) = k\frac{a}{b} + \left(a - k\frac{a}{b}\right) = a.$$

Si $k\cdot\frac{a}{b} \notin \mathbb{N}$ (donc $\notin \mathbb{Z}$ puisque c'est un rationnel positif inférieur à a), on écrit $k\frac{a}{b} = E\left(k\frac{a}{b}\right) + \theta$ avec $\theta \in]0,1[$. Alors $a - k\frac{a}{b} = (a - E(k\frac{a}{b})) - \theta$, et comme $a - E(k\frac{a}{b})$ est entier et $\theta \in]0,1[$,

$$E\left(a - k\frac{a}{b}\right) = a - E\left(k\frac{a}{b}\right) - 1.$$

Donc $E\left(k\frac{a}{b}\right) + E\left(a - k\frac{a}{b}\right) = a - 1$.

3. D'après la question 2, $k\cdot\frac{a}{b} \in \mathbb{N}$ équivaut à $b \mid ka$. Comme $a \wedge b =: \delta$, en posant $a = \delta a'$, $b = \delta b'$ avec $a' \wedge b' = 1$, la condition $b \mid ka$ devient $\delta b' \mid k\delta a'$, soit $b' \mid ka'$, et comme $a' \wedge b' = 1$, par le lemme de Gauss : $b' \mid k$.
Pour $k \in [\![1, b-1]\!]$, les multiples de b' dans cet intervalle sont $b', 2b', \ldots, (\delta-1)b'$ (car $b = \delta b'$, donc le multiple suivant serait $\delta b' = b$, exclu). Il y en a exactement $\delta - 1 = a\wedge b - 1$.

4. D'après la question 1 et les questions 2-3 : parmi les $b-1$ termes de la somme $\sum_{k=1}^{b-1}\left[E(k\frac{a}{b}) + E(a - k\frac{a}{b})\right]$, il y en a $a \wedge b - 1$ qui valent a (cas $k\frac{a}{b} \in \mathbb{N}$) et les $(b-1) - (a\wedge b - 1) = b - a\wedge b$ restants qui valent $a-1$. En notant $\delta = a \wedge b$, la question 1 donne :

$$2\sum_{k=1}^{b-1} E\left(k\frac{a}{b}\right) = (\delta - 1)\cdot a + (b - \delta)\cdot(a-1).$$

Développons le membre de droite :

$$(\delta-1)a + (b-\delta)(a-1) = \delta a - a + ab - b - \delta a + \delta = ab - a - b + \delta.$$

D'où

$$2\sum_{k=1}^{b-1} E\left(k\frac{a}{b}\right) = ab - a - b + \delta \implies \boxed{a \wedge b = a + b - ab + 2\sum_{k=1}^{b-1} E\left(k\cdot\frac{a}{b}\right).}$$

△ Piège classique

Le signe devant ab est négatif, pas positif : c'est l'erreur la plus fréquente dans ce calcul. Une vérification numérique rapide (par exemple $a = 3, b = 5$: gcd $= 1$, $\sum_{k=1}^{4} E(3k/5) = 0+1+1+2 = 4$, et $3 + 5 - 15 + 8 = 1$ ✓) permet de repérer immédiatement une erreur de signe.

∗ Astuce du chercheur

Ce type de formule (liant le PGCD à une somme de parties entières) est l'analogue arithmétique discret de la formule de réciprocité de Dedekind ; elle est l'occasion classique de manipuler avec soin les cas « entier / non entier » de la partie entière.

5. Par symétrie du rôle de a et b (le PGCD $a \wedge b = b \wedge a$ est symétrique), la même formule appliquée en échangeant a et b donne

$$a \wedge b = a + b - ab + 2\sum_{k=1}^{a-1} E\left(k \cdot \frac{b}{a}\right).$$

En comparant les deux expressions de $a \wedge b$, les termes $a + b - ab$ sont communs, donc

$$\sum_{k=1}^{b-1} E\left(k\frac{a}{b}\right) = \sum_{k=1}^{a-1} E\left(k\frac{b}{a}\right).$$

⋆ À retenir

Les deux sommes sont **toujours égales**, quels que soient $a, b \in \mathbb{N}^*$: c'est une identité de réciprocité remarquable, indépendante de la valeur du PGCD.

✓ Exercice 12 — Ordre multiplicatif & nombres de Mersenne

1. La suite $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ prend ses valeurs dans $\{0, 1, \dots, n-1\}$, un ensemble fini à n éléments. Par le principe des tiroirs, parmi les $n+1$ premiers termes $r_0, r_1, \dots, r_n$, deux doivent coïncider : il existe $i < j$ dans $[\![0, n]\!]$ tels que $r_i = r_j$.

2. $r_i = r_j$ signifie $a^i \equiv a^j \pmod{n}$. Comme $a \wedge n = 1$, on a $a^i \wedge n = 1$ donc a^i est inversible modulo n ; en multipliant par l'inverse de a^i :

$$a^{j-i} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Avec $k = j - i \in \mathbb{N}^*$ (car $i < j$), on obtient l'existence recherchée.

3. Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $a^q \equiv 1 \pmod{n}$. Effectuons la division euclidienne de q par $o(a)$: $q = o(a) \cdot Q + R$ avec $0 \le R < o(a)$. Alors

$$a^q = (a^{o(a)})^Q \cdot a^R \equiv 1^Q \cdot a^R = a^R \pmod{n}.$$

Donc $a^q \equiv 1 \pmod{n}$ entraîne $a^R \equiv 1 \pmod{n}$. Mais $0 \le R < o(a)$ et $o(a)$ est par définition le *plus petit* entier strictement positif vérifiant cette congruence ; donc $R = 0$ (sinon R contredirait la minimalité de $o(a)$). D'où $q = o(a) \cdot Q : o(a) \mid q$.

Propriété fondamentale de l'ordre multiplicatif

$a^q \equiv 1 \pmod{n} \iff o(a) \mid q$. C'est l'analogue, dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, du fait que l'ensemble des multiples d'un générateur engendre tout le sous-groupe cyclique associé.

4. (**a**) Soit $n \ge 2$ tel que $n \mid 2^n - 1$, et p le plus petit diviseur premier de n. Comme $n \mid 2^n - 1$, on a $p \mid 2^n - 1$, c'est-à-dire $2^n \equiv 1 \pmod{p}$. Notons que p est nécessairement impair (car

$2^n - 1$ est impair, donc $p \neq 2$), donc $2 \wedge p = 1$ et $o(2)$ (l'ordre de 2 modulo p) est bien défini.
D'après la question 3, $2^n \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow o(2) \mid n$.
Par ailleurs, le petit théorème de Fermat donne $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (car p premier et $p \nmid 2$), donc toujours par la question 3, $o(2) \mid p - 1$.

Petit théorème de Fermat

Si p est premier et $p \nmid a$, alors $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

4. (**b**) On a établi $o(2) \mid n$ et $o(2) \mid p - 1$. Donc $o(2) \mid n \wedge (p - 1)$.

∗ Astuce du chercheur

Or p est le **plus petit** diviseur premier de n. Tout diviseur de $n \wedge (p-1)$ est en particulier un diviseur de n inférieur ou égal à $p - 1 < p$. Mais aucun diviseur de n autre que 1 ne peut être strictement inférieur à p par minimalité de p ! Donc $n \wedge (p - 1) = 1$.

Ainsi $o(2) \mid 1$, donc $o(2) = 1$, c'est-à-dire $2^1 \equiv 1 \pmod{p}$, soit $p \mid 1$. C'est **absurde** car p est premier (donc $p \geq 2$).
Conclusion. Il n'existe aucun entier $n \geq 2$ tel que $n \mid 2^n - 1$.

⋆ À retenir

Ce résultat classique ("aucun nombre de Mersenne $2^n - 1$ n'est jamais divisible par n lui-même, sauf trivialement") illustre la puissance de l'argument **ordre multiplicatif + minimalité du plus petit facteur premier**. Schéma à retenir : $o(a) \mid n$ et $o(a) \mid p - 1$ avec p = plus petit facteur premier de n force $o(a) = 1$ par un argument de taille, d'où une contradiction immédiate.

G Géométrie & complexes — Corrections

✓ Exercice 13 — Encadrement sur le cercle unité

Factorisation par l'arc moitié

Pour $z = e^{it}$, on a $z - 1 = e^{it} - 1 = e^{it/2}\left(e^{it/2} - e^{-it/2}\right) = 2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)e^{it/2}$, d'où

$$|z - 1| = 2\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|.$$

1. Posons $a = \sin\left(\frac{t}{2}\right)$. D'après le rappel, $|z - 1| = 2|a|$.
Pour $|1 + z^2|$, on écrit $1 + z^2 = 1 + e^{2it} = e^{it}\left(e^{-it} + e^{it}\right) = 2\cos(t)\,e^{it}$, donc

$$|1 + z^2| = 2|\cos t|.$$

En utilisant $\cos t = 1 - 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = 1 - 2a^2$, on obtient

$$|1 + z^2| = 2\left|1 - 2a^2\right|.$$

D'où

$$\boxed{|z - 1| + |1 + z^2| = 2|a| + 2\left|1 - 2a^2\right|.}$$

∗ Astuce du chercheur

La factorisation par l'arc moitié ($e^{it} - 1 = 2i\sin(t/2)e^{it/2}$) est LE réflexe à avoir pour tout module de la forme $|e^{it} - 1|$: elle transforme un module de différence en un sinus pur, sans aucune racine carrée à manipuler.

2. Posons $f(a) = 2|a| + 2|1 - 2a^2|$ pour $a \in [-1, 1]$ (puisque $a = \sin(t/2) \in [-1, 1]$). La fonction f est paire, étudions-la pour $a \in [0, 1]$:

$$f(a) = \begin{cases} 2a + 2(1 - 2a^2) = -4a^2 + 2a + 2 & \text{si } 0 \le a \le \dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{car } 1 - 2a^2 \ge 0) \\ 2a + 2(2a^2 - 1) = 4a^2 + 2a - 2 & \text{si } \dfrac{1}{\sqrt{2}} \le a \le 1 \quad (\text{car } 1 - 2a^2 \le 0) \end{cases}$$

Sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$: $f(a) = -4a^2 + 2a + 2$ est une parabole de sommet en $a = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, valeur maximale locale $f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{4}$; aux bornes, $f(0) = 2$ et $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2 + \sqrt{2} + 2 = \sqrt{2}$.
Sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$: $f(a) = 4a^2 + 2a - 2$ est strictement croissante (dérivée $8a + 2 > 0$), de $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$ à $f(1) = 4 + 2 - 2 = 4$.

Méthode

Le minimum de f sur $[0, 1]$ est donc atteint exactement au point de raccordement $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, où f passe d'une parabole concave (qui redescend) à une parabole convexe (qui remonte) : c'est typiquement là que se cache le minimum d'une fonction définie par morceaux via une valeur absolue.

Le minimum de f sur $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ est $\min(f(0), f(1/\sqrt{2})) = \min(2, \sqrt{2}) = \sqrt{2}$ (la parabole étant concave, son minimum sur l'intervalle est à l'une des deux bornes). Le maximum sur $[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$ est $f(1) = 4$ (croissance stricte). Globalement sur $[0, 1]$ (donc sur $[-1, 1]$ par parité) :

$$\min_{a\in[-1,1]} f(a) = \sqrt{2}, \qquad \max_{a\in[-1,1]} f(a) = 4.$$

On conclut

$$\sqrt{2} \le |z-1| + |1+z^2| \le 4.$$

⋆ À retenir

Égalité à gauche : $a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, soit $t = \pm\dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ essentiellement, c'est-à-dire $z = \pm i$.
Égalité à droite : $a = \pm 1$, soit $t = \pi \pmod{2\pi}$, c'est-à-dire $z = -1$.

✓ Exercice 14 — Inégalité optimale sur le cercle unité

1. Par l'inégalité triangulaire, $|z-1| \le |z| + 1 = 2$ et $|z^2 - z + 1| \le |z|^2 + |z| + 1 = 3$. On en déduit

$$3|z-1| - |z^2 - z + 1| \le 3\cdot 2 - 0 = 6 \qquad \text{et} \qquad 3|z-1| - |z^2 - z + 1| \ge 3\cdot 0 - 3 = -3.$$

Conclusion : cet encadrement grossier ($-3 \le \cdots \le 6$) est bien plus large que l'encadrement annoncé $\left[-1, \frac{13}{4}\right]$: l'inégalité triangulaire seule ne suffit pas, il faut affiner.

△ Piège classique

C'est l'écueil classique : l'inégalité triangulaire est souvent le premier réflexe, mais elle ignore la contrainte $|z| = 1$ *couplée* entre les deux termes (le même z apparaît dans les deux modules). Une approche purement indépendante terme à terme perd cette corrélation.

2. Pour $|z| = 1$, $z\bar{z} = 1$ donc $\bar{z} = 1/z$. Calculons $|z^2 - z + 1|^2 = (z^2 - z + 1)\overline{(z^2 - z + 1)}$ en développant via la formule $|A - B + C|^2 = |A|^2 + |B|^2 + |C|^2 - 2\mathrm{Re}(A\bar{B}) + 2\mathrm{Re}(A\bar{C}) - 2\mathrm{Re}(B\bar{C})$ avec $A = z^2$, $B = z$, $C = 1$.

 # Méthode

Pour un module au carré d'une somme de plusieurs termes complexes, développer systématiquement via les parties réelles des produits croisés plutôt que d'essayer de factoriser directement : c'est plus sûr et plus mécanique.

Avec $|z| = 1$: $|A|^2 = |z^2|^2 = 1$, $|B|^2 = |z|^2 = 1$, $|C|^2 = 1$. Et $A\bar{B} = z^2\bar{z} = z$ (car $z\bar{z} = 1$), donc $\mathrm{Re}(A\bar{B}) = \mathrm{Re}(z)$. De même $A\bar{C} = z^2$ donc $\mathrm{Re}(A\bar{C}) = \mathrm{Re}(z^2)$, et $B\bar{C} = z$ donc $\mathrm{Re}(B\bar{C}) = \mathrm{Re}(z)$. D'où

$$|z^2 - z + 1|^2 = 1 + 1 + 1 - 2\mathrm{Re}(z) + 2\mathrm{Re}(z^2) - 2\mathrm{Re}(z) = 3 - 4\mathrm{Re}(z) + 2\mathrm{Re}(z^2).$$

3. Pour $z = e^{i\theta}$, $\mathrm{Re}(z^2) = \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = 2\mathrm{Re}(z)^2 - 1$. Donc

$$\mathrm{Re}(z^2) = 2\,\mathrm{Re}(z)^2 - 1.$$

Par ailleurs, $x = |z-1| = 2\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|$ (rappel de l'exercice 13), donc $x^2 = 4\sin^2\dfrac{\theta}{2} = 2(1-\cos\theta) = 2 - 2\mathrm{Re}(z)$, d'où

$$\mathrm{Re}(z) = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

4. En substituant dans l'expression de la question 2 :

$$|z^2 - z + 1|^2 = 3 - 4\mathrm{Re}(z) + 2(2\mathrm{Re}(z)^2 - 1) = 1 - 4\mathrm{Re}(z) + 4\mathrm{Re}(z)^2 = (1 - 2\mathrm{Re}(z))^2.$$

Avec $\mathrm{Re}(z) = 1 - \dfrac{x^2}{2}$: $1 - 2\mathrm{Re}(z) = 1 - 2 + x^2 = x^2 - 1$, donc

$$|z^2 - z + 1|^2 = (x^2-1)^2 \iff |z^2 - z + 1| = |x^2 - 1|.$$

D'où

$$3|z-1| - |z^2 - z + 1| = 3x - |x^2 - 1|.$$

∗ Astuce du chercheur

Tout le travail des questions 2-3-4 consiste à exprimer le second module *en fonction de la même variable* $x = |z-1|$ que le premier : c'est ce qui permet de tout ramener à l'étude d'une fonction réelle d'une seule variable.

5. Soit $f(x) = 3x - |x^2 - 1|$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 3x - (1 - x^2) = x^2 + 3x - 1 & \text{si } |x| \le 1 \\ 3x - (x^2 - 1) = -x^2 + 3x + 1 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

Sur $[-1, 1]$: $f(x) = x^2 + 3x - 1$, parabole convexe, $f'(x) = 2x + 3$, qui s'annule en $x = -\dfrac{3}{2} \notin [-1, 1]$: f est donc strictement croissante sur $[-1, 1]$ (car $f'(x) \ge 2(-1) + 3 = 1 > 0$). $f(-1) = 1 - 3 - 1 = -3$, $f(1) = 1 + 3 - 1 = 3$.
Sur $[1, +\infty[$: $f(x) = -x^2 + 3x + 1$, parabole concave, $f'(x) = -2x + 3$, s'annule en $x = \dfrac{3}{2}$. Maximum local $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{9}{4} + \dfrac{9}{2} + 1 = \dfrac{13}{4}$. On a $f(1) = -1 + 3 + 1 = 3$ et f décroît ensuite vers $-\infty$.

x	-1		1	$\frac{3}{2}$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	3	$\frac{13}{4}$	$\searrow$

6. Lorsque z décrit U, θ décrit $\mathbb{R}$ et $x = 2|\sin(\theta/2)|$ décrit $[0, 2]$ (valeur 0 en $\theta = 0$, valeur 2 en $\theta = \pi$).

7. D'après le tableau de variations, sur $[0, 2]$: f est croissante sur $[0, 1]$ de $f(0) = -1$ à $f(1) = 3$, puis sur $[1, 2]$, f croît jusqu'au maximum $f(3/2) = 13/4$ puis redescend à $f(2) = -4 + 6 + 1 = 3$. Le minimum de f sur $[0, 2]$ est donc $f(0) = -1$, et le maximum est $f(3/2) = \dfrac{13}{4}$:

$$-1 \le f(x) \le \frac{13}{4} \qquad \text{pour } x \in [0, 2],$$

c'est-à-dire exactement

$$-1 \le 3|z-1| - |z^2 - z + 1| \le \frac{13}{4}.$$

8. (**a**) $\Gamma_1 = \{|z| = 1\}$ est le cercle trigonométrique de centre O, rayon 1. $\Gamma_2 = \{|z-1| = \frac{3}{2}\}$ est le cercle de centre 1 (le point d'affixe 1), de rayon $\dfrac{3}{2}$.

Pour trouver les points d'intersection, on résout $|z| = 1$ et $|z-1| = \dfrac{3}{2}$. En coordonnées $z = u + iv$:

$$u^2 + v^2 = 1, \qquad (u-1)^2 + v^2 = \frac{9}{4}.$$

En soustrayant : $u^2 - (u-1)^2 = 1 - \dfrac{9}{4}$, soit $2u - 1 = -\dfrac{5}{4}$, donc $u = -\dfrac{1}{8}$. Alors $v^2 = 1 - u^2 = 1 - \dfrac{1}{64} = \dfrac{63}{64}$, donc $v = \pm\dfrac{\sqrt{63}}{8} = \pm\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$.

Les points d'intersection sont $z = -\dfrac{1}{8} \pm i\,\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$.

8. (**b**) La valeur -1 est atteinte en $x = 0$, c'est-à-dire $z = 1$ (puisque $|z-1| = 0$). La valeur $\dfrac{13}{4}$ est atteinte en $x = \dfrac{3}{2}$, c'est-à-dire $|z-1| = \dfrac{3}{2}$: ce sont exactement les points de $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ trouvés en (a), soit $z = -\dfrac{1}{8} \pm i\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$.

⋆ À retenir

Le point-clé méthodologique de cet exercice : transformer une inégalité à variable complexe en une étude de fonction réelle à une variable ($x = |z-1|$), via une identification habile des parties réelles. C'est une technique très transférable à tout problème d'optimisation sur le cercle unité.

✓ Exercice 15 — Inégalité différentielle globale

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| + |f'(x)+1| \leq 1$. En particulier $|f'(x)+1| \leq 1 - |f(x)| \leq 1$, donc $-1 \leq f'(x) + 1 \leq 1$, soit

$$-2 \leq f'(x) \leq 0.$$

En particulier $f'(x) \leq 0$ pour tout x : f est décroissante.

2. (**a**) Supposons $f(a) < 0$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$. Comme f est décroissante (question 1), pour tout $x \geq a$: $f(x) \leq f(a) < 0$, donc $|f(x)| = -f(x) \geq -f(a) > 0$.
L'hypothèse donne $|f(x)| + |f'(x)+1| \leq 1$, donc

$$|f'(x)+1| \leq 1 - |f(x)| \leq 1 - (-f(a)) = 1 + f(a).$$

Comme $f'(x) \leq 0$ (question 1), $f'(x) + 1 \leq 1$; et l'inégalité ci-dessus donne $f'(x) + 1 \geq -(1 + f(a))$, mais on veut surtout la majoration de $f'(x)$:

$$f'(x) + 1 \leq |f'(x)+1| \leq 1 + f(a) \implies f'(x) \leq f(a).$$

Donc, pour tout $x \geq a$, $f'(x) \leq f(a)$.

2. (**b**) Pour $x \geq a$, en intégrant l'inégalité $f'(t) \leq f(a)$ sur $[a, x]$:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^x f(a)\,\mathrm{d}t = f(a)(x-a).$$

Donc $f(x) \leq f(a) + f(a)(x-a) = f(a)(1+x-a)$. Comme $f(a) < 0$ et $1+x-a \to +\infty$ quand $x \to +\infty$, on a $f(a)(1+x-a) \to -\infty$ (produit d'un nombre négatif fixé par une quantité qui tend vers $+\infty$). Par comparaison,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Contradiction : d'après l'inégalité de l'énoncé, $|f(x)| \leq 1$ pour tout x (car $|f(x)| \leq 1 - |f'(x)+1| \leq 1$), donc $f(x) \geq -1$ pour tout x, ce qui est incompatible avec $f(x) \to -\infty$.

△ Piège classique

Le point essentiel à ne pas manquer : $|f(x)| \leq 1$ découle directement de l'hypothèse globale $|f(x)| + |f'(x)+1| \leq 1$ (le second terme étant positif). Cette borne est ce qui rend la limite $-\infty$ absurde.

3. D'après 2(a)-(b), supposer $f(a) < 0$ pour un certain a mène à une contradiction : donc $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier $f \geq 0$ partout, et f est décroissante (question 1). Montrons qu'il n'existe pas $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) > 0$, par un argument symétrique à celui de la question 2, mais appliqué vers $-\infty$.

 # Méthode

f est décroissante : la situation vers $-\infty$ est le miroir de la situation vers $+\infty$. Pour $x \leq a$, c'est désormais $f(x) \geq f(a)$ (et non $\leq$), ce qui va permettre de faire diverger f vers $+\infty$ en reculant, à confronter avec la même borne $|f| \leq 1$.

Supposons par l'absurde $f(a) > 0$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$. Pour $x \leq a$, par décroissance de f : $f(x) \geq f(a) > 0$, donc $|f(x)| = f(x) \geq f(a)$.
L'hypothèse $|f(x)| + |f'(x)+1| \leq 1$ donne alors

$$|f'(x)+1| \leq 1 - f(x) \leq 1 - f(a).$$

Pour exploiter cette information, utilisons directement la borne supérieure de la valeur absolue : comme $f(x) \geq f(a) > 0$ pour $x \leq a$, on a $1 - f(x) \leq 1 - f(a) < 1$, donc

$$|f'(x)+1| \leq 1 - f(x) \leq 1 - f(a) \implies f'(x) + 1 \leq 1 - f(a) \implies f'(x) \leq -f(a).$$

Ainsi, pour tout $x \leq a$: $f'(x) \leq -f(a) < 0$ (constante strictement négative, indépendante de x).

En intégrant cette inégalité sur $[x, a]$ pour $x < a$:

$$f(a) - f(x) = \int_x^a f'(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_x^a (-f(a))\,\mathrm{d}t = -f(a)(a-x).$$

Donc

$$f(x) \geq f(a) + f(a)(a-x) = f(a)(1+a-x).$$

Quand $x \to -\infty$, $1+a-x \to +\infty$, et comme $f(a) > 0$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

Contradiction : on a établi que $|f(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car $|f(x)| \leq 1 - |f'(x)+1| \leq 1$, l'hypothèse étant valable sur tout $\mathbb{R}$), donc $f(x) \leq 1$ pour tout x, ce qui est incompatible avec $f(x) \to +\infty$ quand $x \to -\infty$.
Conclusion. Il n'existe pas $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) > 0$. Combiné à $f \geq 0$ partout (établi en début de question), on conclut

$$f \equiv 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

△ Piège classique

La question 3 est l'exact miroir de la question 2, mais le piège est de croire que la décroissance de f joue le même rôle dans les deux sens : en réalité, c'est parce que f décroît que reculer vers $-\infty$ fait *croître* f, symétriquement à l'argument où avancer vers $+\infty$ le fait *décroître*. Bien identifier le sens de l'inégalité différentielle à chaque étape ($f'(x) \leq f(a)$ contre $f'(x) \leq -f(a)$) est essentiel.

⋆ À retenir

Le résultat final de cet exercice est que la seule fonction compatible avec $|f|+|f'+1| \leq 1$ partout est $f \equiv 0$: on l'obtient en excluant successivement $f(a) < 0$ (question 2) et $f(a) > 0$ (question 3), ne laissant que $f \equiv 0$ comme seule possibilité. Le schéma de preuve par double exclusion (signe strictement négatif, puis signe strictement positif) est une stratégie classique pour les inégalités différentielles globales sur $\mathbb{R}$.

✓ Exercice 16 — Périodicité et minimum d'une somme de cosinus

1. Supposons $a = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$. Posons $T = 2\pi q$. Alors

$$f_a(x+T) = \cos(x+2\pi q) + \cos(a(x+2\pi q)) = \cos x + \cos(ax + 2\pi aq).$$

Or $aq = \dfrac{p}{q} \cdot q = p \in \mathbb{Z}$, donc $2\pi aq = 2\pi p$ est un multiple entier de 2π, donc

$$\cos(ax + 2\pi aq) = \cos(ax + 2\pi p) = \cos(ax).$$

D'où $f_a(x+T) = \cos x + \cos(ax) = f_a(x)$: f_a est périodique (de période $T = 2\pi q$).

2. Supposons f_a périodique, de période $T > 0$: $f_a(x+T) = f_a(x)$ pour tout x.

 # Méthode

Pour montrer qu'une combinaison de cosinus à fréquences incommensurables ne peut être périodique, on exploite les **points où le maximum global 2 est atteint** : $f_a(x) = 2$ équivaut à $\cos x = 1$ ET $\cos(ax) = 1$ simultanément (somme de deux termes chacun ≤ 1, valant 2 seulement si chacun vaut 1).

$f_a(0) = 2$ est le maximum global de f_a (somme de deux cosinus, chacun ≤ 1). Par périodicité, $f_a(nT) = f_a(0) = 2$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, donc $\cos(nT) = 1$ et $\cos(anT) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. La condition $\cos(nT) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ impose $T \in 2\pi\mathbb{Q}$... plus précisément, T doit être un multiple de 2π par un rationnel pour que $nT \in 2\pi\mathbb{Z}$ ait des solutions structurées ; en fait $\cos(T) = 1$ donne directement $T = 2\pi k$ pour un $k \in \mathbb{N}^*$ (période minimale positive, $T > 0$).
De même $\cos(aT) = 1$ donne $aT = 2\pi m$ pour un $m \in \mathbb{Z}$. En combinant $T = 2\pi k$ et $aT = 2\pi m$:

$$a \cdot 2\pi k = 2\pi m \implies a = \frac{m}{k} \in \mathbb{Q}.$$

⋆ **À retenir**

$$\boxed{f_a \text{ est périodique } \iff a \in \mathbb{Q}.}$$

C'est un résultat classique sur les sommes de fonctions trigonométriques à fréquences distinctes : la périodicité globale exige la commensurabilité (rapport rationnel) des fréquences.

3. $m(a) = \min_{x\in\mathbb{R}} (\cos x + \cos(ax))$. Effectuons le changement de variable $y = ax$ (donc $x = y/a$, bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ car $a \neq 0$) :

$$f_a(x) = \cos\left(\frac{y}{a}\right) + \cos(y) = f_{1/a}(y).$$

Comme $x \mapsto y = ax$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, les ensembles de valeurs prises par f_a et $f_{1/a}$ sont identiques, donc

$$m(a) = \min_{x\in\mathbb{R}} f_a(x) = \min_{y\in\mathbb{R}} f_{1/a}(y) = m(1/a).$$

4. Soit $a \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$. On cherche x tel que $f_a(x) < -1$, ce qui donnera $m(a) \leq -1$ par un exemple explicite. Essayons $x = \pi$:

$$f_a(\pi) = \cos\pi + \cos(a\pi) = -1 + \cos(a\pi).$$

Comme $a \in]\frac{1}{2}, 1[$, $a\pi \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, donc $\cos(a\pi) < 0$ strictement (cosinus négatif sur ce quadrant), d'où

$$f_a(\pi) = -1 + \cos(a\pi) < -1.$$

Donc $m(a) \leq f_a(\pi) < -1 \leq -1$, soit $m(a) \leq -1$.

⋆ **Astuce du chercheur**

Le point $x = \pi$ est le candidat naturel : c'est là où $\cos x$ atteint déjà son minimum -1, et il suffit de vérifier que $\cos(a\pi)$ y est strictement négatif pour gagner un peu plus que -1.

5. Calcul de $m(3)$**.** On cherche $\min_x (\cos x + \cos(3x))$. Utilisons $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$ et posons $c = \cos x \in [-1, 1]$:

$$g(c) = c + 4c^3 - 3c = 4c^3 - 2c.$$

$$g'(c) = 12c^2 - 2 = 0 \iff c^2 = \frac{1}{6} \iff c = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

$$g\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 4\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^3 - 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{4}{6\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}}$$
$$= \frac{-4+12}{6\sqrt{6}} = \frac{8}{6\sqrt{6}} = \frac{4}{3\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{18} = \frac{2\sqrt{6}}{9}.$$

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 4\cdot\frac{1}{6\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{4}{6\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{4-12}{6\sqrt{6}} = \frac{-8}{6\sqrt{6}} = -\frac{2\sqrt{6}}{9}.$$

Comparons aux bornes : $g(-1) = -4 + 2 = -2$, $g(1) = 4 - 2 = 2$. Le minimum de g sur $[-1, 1]$ est donc

$$\min\left(g(-1),\ g\left(\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right)\right) = \min\left(-2,\ -\frac{2\sqrt{6}}{9}\right).$$

Numériquement $\dfrac{2\sqrt{6}}{9} \approx \dfrac{4{,}899}{9} \approx 0{,}544$, donc $-2 < -0{,}544$: le minimum global est

$$m(3) = g(-1) = -2.$$

△ Piège classique

Ne pas se fier uniquement aux points critiques internes : ici, le minimum est atteint au bord du domaine $c \in [-1, 1]$ (en $c = -1$, soit $x = \pi$), pas au point critique intérieur. Toujours comparer les valeurs aux bornes ET aux points critiques.

Vérification de $m(2) = -\dfrac{9}{8}$. On cherche $\min_x(\cos x + \cos 2x)$. Avec $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ et $c = \cos x \in [-1, 1]$:

$$h(c) = c + 2c^2 - 1.$$

$h'(c) = 1 + 4c = 0 \iff c = -\dfrac{1}{4}$, qui est bien dans $[-1, 1]$.

$$h\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{16} - 1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} - 1 = -\frac{2}{8} + \frac{1}{8} - \frac{8}{8} = -\frac{9}{8}.$$

Comme h est une parabole convexe (coefficient de c^2 positif), ce point critique est bien un minimum global sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $[-1, 1]$:

$$m(2) = h\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{9}{8}.$$

On vérifie bien $m(2) = -\dfrac{9}{8}$, conforme à l'énoncé. ✓

⋆ À retenir

La méthode générale pour calculer $m(n)$ avec $n \in \mathbb{N}$: exprimer $\cos(nx)$ comme un polynôme de Tchebychev $T_n(\cos x)$, puis minimiser le polynôme $c + T_n(c)$ sur $[-1, 1]$ en comparant points critiques internes et valeurs aux bords $c = \pm 1$.

Fin du recueil

« La rigueur n'est pas l'ennemie de la créativité :
elle en est le terrain d'exercice. »

Math & Expert — R. Abed, Professeur Agrégé de Mathématiques

CPGE Al Zahrawi | CPGE Abulcasis