



MathsElites
EXCELLENCE EN MATHÉMATIQUES

CLASSES PRÉPARATOIRES MPSI & MP

Ensembles, Applications et Relations

Cours • Exercices • Problèmes

Livre I — Énoncés

Au programme :

- ✓ Cours complet illustré (introduction historique, méthodes, astuces)
- ✓ Exercices d'application
- ✓ Neuf problèmes : ouverture/fermeture, parties stables, $\liminf$ / $\limsup$, topologie, saturation, clans et tribus, dénombrabilité, filtres

Avant-propos



Ce premier livre de la collection **Maths Elites** rassemble, pour le chapitre « **Ensembles, applications et relations** » (MPSI/MP), un **cours complet** illustré, une série d'**exercices d'application** et **neuf problèmes** de synthèse. Les **corrigés des exercices** font l'objet d'un **second livre**.

Le cours est jalonné d'encadrés : **définitions** (teal), **propositions** (bleu), **méthodes et astuces** (or), **pièges à éviter** (corail). Une introduction historique présente les fondateurs de la théorie des ensembles.

Maths Elites — R. Abed
Professeur Agrégé de Mathématiques

Sommaire

Avant-propos	i
1 Ensembles, applications et relations	1
1 Introduction historique	1
1.1 Georg Cantor (1845–1918) — le fondateur	2
1.2 Richard Dedekind (1831–1916) — le rigoureux	2
1.3 Ernst Zermelo (1871–1953) — l’axiomaticien	3
1.4 Fraenkel et Russell — l’axiomatique et les paradoxes	3
2 Notions sur les ensembles	4
2.1 Opérations sur les parties	5
3 Fonction caractéristique d’une partie	6
4 Différence symétrique	7
5 Familles d’ensembles et partitions	7
6 Produit cartésien	9
7 Applications	9
7.1 Injectivité, surjectivité, bijectivité	10
7.2 Image directe, image réciproque	11
8 Relations binaires	12
8.1 Relations d’équivalence	12
8.2 Relations d’ordre	13
9 Exercices d’application	13
10 Problèmes	15
10.1 Problème 1 — Ouverture, fermeture et frontière	15
10.2 Problème 2 — Parties stables par une application	16
10.3 Problème 3 — Limites inférieure et supérieure d’une suite d’ensembles	16
10.4 Problème 4 — Espaces topologiques, points d’accumulation	17
10.5 Problème 5 — Parties saturées par une relation d’équivalence	18
10.6 Problème 6 — Une relation d’équivalence dans $\mathcal{P}(E)$	18
10.7 Problème 7 — Clans, semi-clans et tribus	19
10.8 Problème 8 — Ensembles dénombrables	19
10.9 Problème 9 — Filtres et relations d’équivalence	20
Synthèse : les réflexes du chapitre	21

Ensembles, applications et relations

« Tant que vous ne me l'aurez pas prouvé, je ne puis que dire : je le vois, mais je ne le crois pas. »
— Georg Cantor, lettre à Dedekind (1877)

Objectif. Fixer la terminologie de la *théorie naïve des ensembles* et maîtriser le langage — ensembles, applications, relations — qui sert de fondement à l'ensemble des mathématiques du supérieur. Ce chapitre est avant tout un chapitre de *langage* et de *raisonnement* : les objets y sont simples, mais la rigueur de rédaction exigée y est maximale.

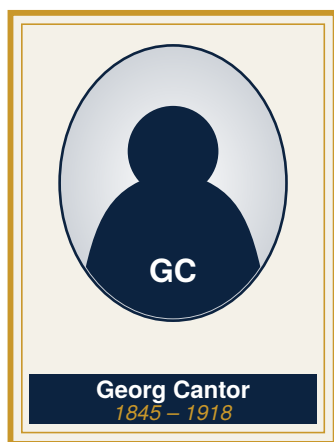
1.1. Introduction historique

La notion d'ensemble paraît aujourd'hui si naturelle qu'on oublie qu'elle est récente : elle date de la fin du XIX^e siècle. Avant Cantor, les mathématiciens manipulaient des collections d'objets sans jamais les considérer *eux-mêmes* comme des objets mathématiques à part entière. Le tournant décisif fut la volonté de *comparer les infinis* : peut-on dire qu'il y a « autant » d'entiers que de rationnels ? « plus » de réels que d'entiers ? C'est en répondant à ces questions que Georg Cantor fonda, presque seul, la théorie des ensembles — et déclencha l'une des plus vives controverses de l'histoire des mathématiques.

Pourquoi une introduction historique ?

Comprendre *d'où viennent* les définitions rend le cours vivant et mémorisable. Les mots que vous allez apprendre (appartenance, inclusion, application, cardinal, relation d'équivalence) ne sont pas tombés du ciel : ils sont le fruit d'un demi-siècle de débats entre les mathématiciens ci-dessous.

1.1.1 Georg Cantor (1845–1918) — le fondateur



Saint-Petersbourg 1845
— Halle 1918

Mathématicien allemand né à Saint-Petersbourg, Cantor fait ses études à Zurich puis à Berlin, où il suit l'enseignement de *Weierstrass* (analyse), *Kummer* (arithmétique) et *Kronecker* (théorie des nombres). Sa grande idée est de *mesurer* les ensembles infinis à l'aide des *cardinaux*.

Il démontre que le cardinal de $\mathbb{N}$ est $\aleph_0$, le plus petit cardinal infini, tandis que celui de $\mathbb{R}$ vaut $c = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$: **l'infini n'est pas unique**. Il établit aussi, à sa propre surprise (« je le vois, mais je ne le crois pas »), que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ont *même* cardinal, et donne une construction ensembliste des nombres réels.

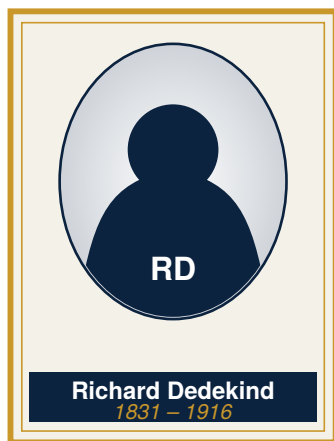
Ses idées, jugées révolutionnaires, lui valent l'hostilité de son ancien maître Kronecker (qui le traite de « charlatan de la science ») et le scepticisme de Poincaré (pour qui les nombres transfinis sont « une maladie dont les mathématiques guériront un jour »). Mais Hilbert prend sa défense avec une phrase restée célèbre.

La citation à retenir

« Nul ne doit nous chasser du paradis que Cantor a créé pour nous. » — David Hilbert (1926)

Cantor lui-même définissait un ensemble comme « une multitude qui peut être comprise comme un tout » : une collection d'objets bien distincts de notre intuition ou de notre pensée, réunis en un tout.

1.1.2 Richard Dedekind (1831–1916) — le rigoureux



Brunswick 1831
— Brunswick 1916

Élève de Gauss à Göttingen, Dedekind est l'interlocuteur privilégié de Cantor : leur correspondance est l'un des grands documents de la naissance de la théorie des ensembles. On lui doit la construction rigoureuse des réels par les *coupures* (les « coupures de Dedekind »), qui comblent les « trous » de $\mathbb{Q}$.

Dans son ouvrage *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888, « Que sont et que doivent être les nombres? »), il donne une définition purement ensembliste des entiers et formule ce qui deviendra les axiomes de Peano. C'est lui qui dégage la notion d'**application** et caractérise les ensembles *infinis* : un ensemble est infini s'il est en bijection avec l'une de ses parties strictes (par exemple $n \mapsto 2n$ met $\mathbb{N}$ en bijection avec les entiers pairs).

1.1.3 Ernst Zermelo (1871–1953) — l'axiomaticien



Berlin 1871
— Fribourg 1953

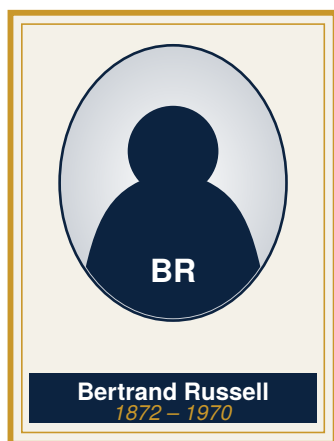
La théorie « naïve » de Cantor, où l'on forme un ensemble à partir de *n'importe quelle* propriété, conduit à des contradictions (voir Russell ci-après). Pour la sauver, Zermelo propose en 1908 une **axiomatisation** : on ne peut plus créer d'ensembles qu'au moyen d'un petit nombre de règles prudentes.

C'est lui qui isole l'*axiome du choix* et démontre le théorème du bon ordre. Ses axiomes, complétés plus tard par Fraenkel, forment le système **ZF** (ou **ZFC** avec l'axiome du choix), fondement standard des mathématiques actuelles. La relation centrale y est l'*appartenance* $\in$: tout, dans cette théorie, se ramène à elle.

1.1.4 Fraenkel et Russell — l'axiomatique et les paradoxes



Abraham Fraenkel (1891–1965), mathématicien allemand puis israélien, complète vers 1922 le système de Zermelo en ajoutant l'*axiome de remplacement*. Le système obtenu, **ZF**, porte leurs deux initiales. Fraenkel fut aussi l'un des fondateurs de l'université hébraïque de Jérusalem et un grand pédagogue de la théorie des ensembles.



Bertrand Russell (1872–1970), philosophe et logicien britannique (prix Nobel de littérature 1950), découvre en 1901 le *paradoxe* qui porte son nom et qui ruine la théorie naïve : si l'on pose $R = \{x \mid x \notin x\}$, l'ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes, alors $R \in R \iff R \notin R$ — contradiction ! C'est précisément pour éviter ce genre de « monstre » que l'axiomatique de Zermelo–Fraenkel interdit de former « l'ensemble de tous les x tels que ... » sans se placer d'emblée *dans* un ensemble E déjà construit.

La leçon du paradoxe de Russell (à garder en tête tout le chapitre)

On n'écrit **jamais** $\{x \mid P(x)\}$ « dans le vide ». On écrit toujours $\{x \in E \mid P(x)\}$, c'est-à-dire qu'on *prélève* des éléments dans un ensemble E *déjà donné*. C'est la raison pour laquelle, dans tout ce cours, on part systématiquement d'un ensemble E « ambiant » et l'on considère ses *parties*.

Frise chronologique



Note sur les portraits

Les médaillons ci-dessus sont des *plaques stylisées* aux couleurs de la charte MathsElites. Pour insérer les photographies d'époque (domaine public), on remplacera la commande `\mathportrait{...}` par `\includegraphics`, les portraits étant disponibles sur Wikimedia Commons.

1.2. Notions sur les ensembles

Dans toute cette section, E désigne un ensemble fixé (l'ensemble *ambiant*), et A, B, C des *parties* de E (c'est-à-dire des sous-ensembles de E).

Appartenance, inclusion, ensemble vide

- L'**appartenance** $x \in A$ signifie « x est un élément de A ».
- Il existe un unique ensemble ne contenant aucun élément, l'**ensemble vide**, noté $\emptyset$. Il est inclus dans tout ensemble : $\emptyset \subset A$.
- L'**inclusion** est définie par

$$A \subset B \iff (\forall x, x \in A \implies x \in B).$$

 $\in$ et $\subset$ ne se confondent jamais

$\in$ relie un *élément* à un *ensemble*; $\subset$ relie deux *ensembles*. Ainsi $2 \in \mathbb{N}$ (élément) mais $\{2\} \subset \mathbb{N}$ (partie). De même $\emptyset \subset A$ toujours, alors que $\emptyset \in A$ seulement si le vide est *listé* comme élément de A (par exemple $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$).

Ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de *toutes* les parties de E :

$$X \in \mathcal{P}(E) \iff X \subset E.$$

En particulier $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$.

Exemple

Pour $E = \{a, b, c\}$, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ possède $2^3 = 8$ éléments :

$$\mathcal{P}(E) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \}.$$

Cardinal de $\mathcal{P}(E)$

Si E est fini de cardinal n , alors $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$. Retenez-le comme ceci : construire une partie, c'est décider *pour chaque* élément s'il est «dedans» ou «dehors», soit 2 choix indépendants

répétés n fois. C'est aussi l'origine de la notation 2^E pour $\mathcal{P}(E)$.

1.2.1 Opérations sur les parties

Réunion, intersection, complémentaire, différence

Pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}, & A \cap B &= \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}, \\ \overline{A} = {}^c_E A &= \{x \in E \mid x \notin A\}, & A \setminus B &= \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}. \end{aligned}$$

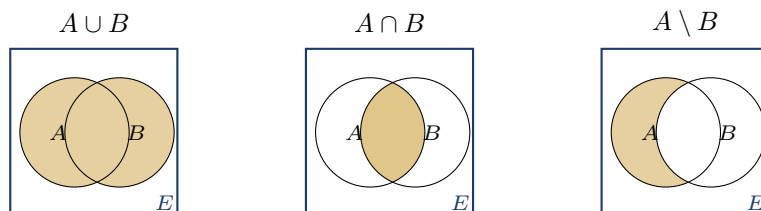
On a la relation fondamentale $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Les définitions se traduisent en équivalences logiques, qui sont l'outil de travail quotidien :

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B), & x \in A \cap B &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B), \\ x \in \overline{A} &\Leftrightarrow \text{non}(x \in A), & x \in A \setminus B &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et non}(x \in B)). \end{aligned}$$

Le dictionnaire ensembles $\leftrightarrow$ logique

Toute la manipulation des ensembles n'est que de la *logique déguisée* : $\cup$ traduit le «ou», $\cap$ le «et», le complémentaire la négation, l'inclusion l'implication et l'égalité l'équivalence. Chaque fois que vous butez sur une identité ensembliste, **redescendez au niveau des éléments** et raisonnez sur les connecteurs logiques.



Montrer une égalité ou une inclusion d'ensembles

Soient E, F deux ensembles. Pour prouver $E = F$, on dispose de deux méthodes.

Méthode 1 (double appartenance). Montrer l'équivalence $(x \in E \Leftrightarrow x \in F)$. Efficace quand les deux ensembles ont une description «symétrique».

Méthode 2 (double inclusion). Montrer séparément $E \subset F$ et $F \subset E$. C'est la méthode reine : pour $E \subset F$, on prend $x \in E$ *quelconque* et on prouve $x \in F$.

Pour une simple inclusion $E \subset F$, seul le second volet est nécessaire.

Propriétés algébriques (à connaître par cœur)

Pour toutes parties A, B, C de E :

commutativité	$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A,$
associativité	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$
élément neutre	$A \cap E = A, \quad A \cup \emptyset = A,$
distributivité	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$
involution	$\overline{\overline{A}} = A,$
lois de De Morgan	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$

Retenir les lois de De Morgan

«Le complémentaire échange $\cup$ et $\cap$.» En logique : la négation d'un «et» est un «ou» (et réciproquement). On les retrouve donc instantanément sans les apprendre, via le dictionnaire ensembles/logique.

Exemple guidé

Montrons $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ par double appartenance. Pour $x \in E$:

$$x \in A \cap (B \setminus C) \iff (x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \notin C).$$

Or $x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C) \iff (x \in A \cap B) \wedge \neg(x \in A \cap C) \iff (x \in A) \wedge (x \in B) \wedge \neg((x \in A) \wedge (x \in C))$. Comme ici $x \in A$ est acquis, $\neg((x \in A) \wedge (x \in C))$ équivaut à $x \notin C$. Les deux conditions coïncident, d'où l'égalité. $\square$

1.3. Fonction caractéristique d'une partie**Fonction (ou indicatrice) caractéristique**

Soient E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$. La **fonction caractéristique** de A est l'application $\mathbf{1}_A : E \rightarrow \{0, 1\}$ (aussi notée φ_A) définie par

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Calcul avec les indicatrices

Pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$, en tant que fonctions de E dans $\{0, 1\} \subset \mathbb{R}$:

$$\mathbf{1}_A^2 = \mathbf{1}_A, \quad \mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \quad \mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B,$$

$$\mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A, \quad \mathbf{1}_{A \setminus B} = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \quad A \subset B \iff \mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B.$$

De plus $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B \iff A = B$.

La technique la plus puissante du chapitre

Pour démontrer une **identité ensembliste**, traduisez-la en une **identité de fonctions** sur les indicatrices, puis *calculez* comme en algèbre (les **1** sont des nombres 0 ou 1, donc $1^2 = 1$). L'égalité des indicatrices équivaut à l'égalité des ensembles. On remplace ainsi un raisonnement logique par un *calcul* sûr et mécanique — idéal quand les «et/ou/non» s'emmêlent.

Exemple

Montrons $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ par les indicatrices :

$$\mathbf{1}_{\overline{A \cup B}} = 1 - \mathbf{1}_{A \cup B} = 1 - \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = (1 - \mathbf{1}_A)(1 - \mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_{\overline{A}} \mathbf{1}_{\overline{B}} = \mathbf{1}_{\overline{A} \cap \overline{B}}.$$

Donc les deux ensembles sont égaux. □

1.4. Différence symétrique

Différence symétrique

Pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$, la **différence symétrique** est

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

C'est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B mais *pas aux deux* (le «ou exclusif»).

Propriétés de $\triangle$

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{A \triangle B} &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B \text{ (soit } \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B \text{ mod } 2), & A \triangle A &= \emptyset, & A \triangle \emptyset &= A, \\ A \triangle B &= B \triangle A, & (A \triangle B) \triangle C &= A \triangle (B \triangle C), & A \cap (B \triangle C) &= (A \cap B) \triangle (A \cap C). \end{aligned}$$

Une structure cachée : $(\mathcal{P}(E), \triangle, \cap)$

Muni de $\triangle$, $\mathcal{P}(E)$ est un *groupe commutatif* : $\triangle$ est associative, commutative, admet $\emptyset$ pour neutre, et *chaque élément est son propre symétrique* ($A \triangle A = \emptyset$). Avec $\cap$ pour «multiplication», on obtient même un *anneau de Boole* — une belle illustration à venir de l'algèbre.

1.5. Familles d'ensembles et partitions

Famille indexée

Soit I un ensemble (dit **ensemble d'indices**). Se donner une **famille** $(E_i)_{i \in I}$ d'ensembles, c'est associer à chaque $i \in I$ un ensemble E_i . Lorsque tous les E_i sont des parties d'un même E , on parle d'une famille de parties de E .

Réunion et intersection d'une famille

Pour une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}, \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

Autrement dit $x \in \bigcup_i A_i \iff \exists i, x \in A_i$ et $x \in \bigcap_i A_i \iff \forall i, x \in A_i$.

$\cup \leftrightarrow \exists, \cap \leftrightarrow \forall$

La réunion « cache » un quantificateur existentiel, l'intersection un quantificateur universel. Pour manipuler $\bigcup$ et $\bigcap$, on écrit *toujours* d'abord la traduction quantifiée : c'est là que se joue toute la rigueur.

De Morgan généralisées

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}.$$

Exemple

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [-n, n] = \mathbb{R}$ (tout réel est dans un $[-n, n]$ pour n assez grand), tandis que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] = \{0\}$.

Partition

Une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E est une **partition** de E si :

- (i) $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$ (parties non vides) ;
- (ii) $\forall i, j \in I, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$ (deux à deux disjointes) ;
- (iii) $\bigcup_{i \in I} A_i = E$ (elles recouvrent E).

Exemple

$\{\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*, \{0\}\}$ est une partition de $\mathbb{R}$. En revanche $\{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-\}$ n'en est *pas* une, car $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\} \neq \emptyset$.

REMARQUE

Intuitivement, partitionner E , c'est le « découper » en morceaux non vides qui ne se chevauchent pas et ne laissent aucun trou. On verra au §8 que les partitions correspondent *exactement* aux relations d'équivalence.

1.6. Produit cartésien

Couple et produit cartésien

Soient E, F deux ensembles. Le **produit cartésien** $E \times F$ est l'ensemble des **couples** (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$:

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}.$$

Deux couples sont égaux *composante par composante* : $(x, y) = (x', y') \iff (x = x' \text{ et } y = y')$. Plus généralement, pour $E_1, \dots, E_n$,

$$E_1 \times \dots \times E_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n\}.$$

Couple $\neq$ paire

Le couple (x, y) est **ordonné** : en général $(x, y) \neq (y, x)$. La *paire* $\{x, y\}$ est un ensemble, donc non ordonnée : $\{x, y\} = \{y, x\}$. Ne pas confondre parenthèses et accolades !

Cardinal d'un produit

Si E et F sont finis, $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$ — d'où le nom et le symbole « $\times$ ». C'est le principe multiplicatif du dénombrement.

1.7. Applications

Graphe fonctionnel, application

Soient E, F deux ensembles et $G \subset E \times F$.

- (i) G est un **graphe fonctionnel** si $\forall x \in E, \exists! y \in F, (x, y) \in G$.
- (ii) Un tel graphe définit une **application** f de E dans F : à chaque $x \in E$ elle associe l'unique y tel que $(x, y) \in G$, noté $y = f(x)$.

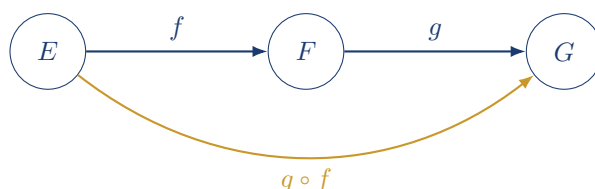
Notation : $f : E \rightarrow F, x \mapsto f(x)$. E est l'**ensemble de départ**, F l'**ensemble d'arrivée**. L'ensemble des applications de E dans F se note $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E .

La condition $\exists!$: le cœur de la définition

« $\exists! y$ » signifie « il existe un *et un seul* y ». Une application doit associer à **tout** x (existence, sinon $f(x)$ n'est pas défini partout) une **unique** image (unicité, sinon f n'est pas « bien définie »). Vérifier qu'un objet est *bien une application* = vérifier ces deux points.

Égalité, identité, composée

- Deux applications $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(G, H)$ sont **égales** si $E = G, F = H$ et $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.
- L'**identité** de E est $\text{id}_E : E \rightarrow E, x \mapsto x$.
- Pour $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$, la **composée** $g \circ f \in \mathcal{F}(E, G)$ est définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.



Associativité, neutres

Pour $f \in \mathcal{F}(E, F)$, $g \in \mathcal{F}(F, G)$, $h \in \mathcal{F}(G, H)$:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f, \quad f \circ \text{id}_E = f, \quad \text{id}_F \circ f = f.$$

La composition n'est pas commutative

En général $g \circ f \neq f \circ g$ (et souvent l'une des deux n'a même pas de sens!). Retenez l'ordre de lecture : dans $g \circ f$, f agit d'abord, g ensuite.

1.7.1 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Les trois propriétés fondamentales

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

- f est **injective** si $\forall (x, x') \in E^2, x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$.
- f est **surjective** si $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.
- f est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective.

Comment prouver l'injectivité / la surjectivité

Injectivité (forme contraposée, la plus commode). f est injective $\iff (\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \implies x = x')$. En pratique : on suppose $f(x) = f(x')$ et on déduit $x = x'$.

Surjectivité. On se donne $y \in F$ quelconque et on résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$: montrer qu'elle admet (au moins) une solution.

Bijectivité. Soit on prouve injectivité + surjectivité, soit on exhibe une *reciproque* (voir ci-dessous) : pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ a une *unique* solution.

Lecture « équation » des trois notions

Fixons $y \in F$ et regardons l'équation $f(x) = y$: injective = «au plus une solution» pour tout y ; surjective = «au moins une solution» pour tout y ; bijective = «exactement une solution» pour tout y . Cette grille résout presque tous les exercices.

Composée et injectivité/surjectivité

Soient $f \in \mathcal{F}(E, F)$, $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ l'est. Si $g \circ f$ est injective, alors f l'est.
- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ l'est. Si $g \circ f$ est surjective, alors g l'est.

Mémo « celle qui touche »

Dans $g \circ f$: si la composée est *injective*, c'est f (la première, côté départ) qui hérite de l'injectivité ;

si elle est *surjective*, c'est g (la dernière, côté arrivée) qui hérite de la surjectivité.

Caractérisation de la bijectivité par la réciproque

$f \in \mathcal{F}(E, F)$ est bijective si et seulement s'il existe une *unique* $g \in \mathcal{F}(F, E)$ telle que

$$g \circ f = \text{id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \text{id}_F.$$

Cette g s'appelle l'**application réciproque** de f et se note f^{-1} .

Deux notations f^{-1} à ne pas confondre

f^{-1} comme *application réciproque* n'a de sens que si f est *bijective*. En revanche, l'*image réciproque* $f^{-1}(B)$ d'une partie B (ci-dessous) est définie pour **toute** application f , bijective ou non. Même symbole, deux objets différents.

1.7.2 Image directe, image réciproque

Image directe et image réciproque

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$, $A \subset E$ et $B \subset F$.

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\} \subset F \quad (\text{image directe de } A),$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\} \subset E \quad (\text{image réciproque de } B).$$

Ainsi $y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x)$ et $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$.

Comportement vis-à-vis de $\cup, \cap, \subset$

Pour $B, C \subset F$ et $A, A' \subset E$:

$$f^{-1}(B \cap C) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C), \quad f^{-1}(B \cup C) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C),$$

$$B \subset C \implies f^{-1}(B) \subset f^{-1}(C), \quad A \subset A' \implies f(A) \subset f(A'),$$

$$f(A \cup A') = f(A) \cup f(A'), \quad \boxed{f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')}.$$

L'inclusion $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$ est stricte en général

L'image réciproque « respecte tout » ($\cup, \cap$, complémentaire), mais l'image directe **ne respecte pas** l'intersection. Contre-exemple : $f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$, $A = \{-1\}$, $A' = \{1\}$. Alors $A \cap A' = \emptyset$ donc $f(A \cap A') = \emptyset$, tandis que $f(A) \cap f(A') = \{1\} \cap \{1\} = \{1\} \neq \emptyset$.

Réflexe

L'image *réciproque* est « gentille » : elle commute avec $\cup, \cap$ et le passage au complémentaire. L'image *directe* n'est gentille qu'avec $\cup$ et $\subset$. En cas de doute, privilégiez toujours un raisonnement par image réciproque.

1.8. Relations binaires

Relation binaire et ses propriétés

Une **relation binaire** $\mathcal{R}$ sur E est une partie $G \subset E \times E$; on note $x \mathcal{R} y$ pour $(x, y) \in G$. On dit que $\mathcal{R}$ est :

réflexive si $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$;

symétrique si $\forall (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y \implies y \mathcal{R} x$;

antisymétrique si $\forall (x, y) \in E^2, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x) \implies x = y$;

transitive si $\forall (x, y, z) \in E^3, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \implies x \mathcal{R} z$.

Deux familles de relations à ne jamais mélanger

Symétrie et antisymétrie sont *presque opposées*. Les relations d'**équivalence** (réflexive, *symétrique*, transitive) généralisent l'*égalité*; les relations d'**ordre** (réflexive, *antisymétrique*, transitive) généralisent le « $\leq$ ». Tout ce paragraphe se résume à ce parallèle.

1.8.1 Relations d'équivalence

Relation d'équivalence, classe

$\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** si elle est réflexive, symétrique et transitive. Pour $x \in E$, la **classe d'équivalence** de x est

$$\text{cl}(x) = \bar{x} = \{y \in E \mid x \mathcal{R} y\}.$$

Exemple

Pour $f \in \mathcal{F}(E, F)$, la relation $x \mathcal{R} y \iff f(x) = f(y)$ est une relation d'équivalence sur E (dite *noyau* de f). Sa classe de x est $f^{-1}(\{f(x)\})$: l'ensemble des points ayant la même image que x .

Théorème fondamental : équivalences $\leftrightarrow$ partitions

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E . Les classes d'équivalence forment une **partition** de E : elles sont non vides, deux à deux disjointes ou confondues, et recouvrent E . *Réciproquement*, toute partition $(A_i)_{i \in I}$ de E provient d'une unique relation d'équivalence, dont les classes sont exactement les A_i : $x \mathcal{R} y \iff \exists i \in I, (x \in A_i \text{ et } y \in A_i)$.

Une équivalence = une partition (et vice-versa)

« Regrouper les objets égaux à un certain point de vue » (équivalence) et « découper en paquets sans reste » (partition) sont **deux facettes de la même idée**. Passer de l'une à l'autre est un réflexe attendu en concours.

REMARQUE

Deux classes $\text{cl}(x)$ et $\text{cl}(y)$ sont soit égales (si $x \mathcal{R} y$), soit disjointes (sinon) : il n'y a jamais de recouvrement partiel. C'est le mécanisme qui garantit qu'on obtient bien une partition.

1.8.2 Relations d'ordre

Relation d'ordre, ordre total/partiel

$\mathcal{R}$ (souvent notée $\preccurlyeq$) est une **relation d'ordre** si elle est réflexive, antisymétrique et transitive. L'ordre est **total** si de plus $\forall (x, y) \in E^2$, $(x \preccurlyeq y \text{ ou } y \preccurlyeq x)$ (deux éléments quelconques sont toujours comparables) ; sinon il est **partiel**.

Exemples de référence

- $\leq$ est un ordre **total** sur $\mathbb{R}$.
- $\subset$ est un ordre **partiel** sur $\mathcal{P}(E)$ (dès que $\text{Card } E \geq 2$: $\{a\}$ et $\{b\}$ ne sont pas comparables).
- La divisibilité $|$ est un ordre **partiel** sur $\mathbb{N}$ (2 et 3 ne se divisent pas mutuellement).
- L'ordre *lexicographique* sur $\mathbb{R}^2$: $(x, y) \preccurlyeq (z, t) \iff (x < z \text{ ou } (x = z \text{ et } y \leq t))$ est **total**.

Majorant, minorant, plus grand/petit élément, éléments maximaux

Soit $\preccurlyeq$ un ordre sur E et $A \subset E$.

- $M \in E$ est un **majorant** de A si $\forall a \in A$, $a \preccurlyeq M$; $m \in E$ est un **minorant** si $\forall a \in A$, $m \preccurlyeq a$.
- $a \in A$ est le **plus grand élément** de A si $\forall x \in A$, $x \preccurlyeq a$ (c'est un majorant appartenant à A) ; de même pour le **plus petit élément**.
- $M \in A$ est **maximal** si $\forall x \in A$, $(M \preccurlyeq x \implies x = M)$ (aucun élément ne lui est strictement supérieur) ; de même $m \in A$ **minimal** si $\forall x \in A$, $(x \preccurlyeq m \implies x = m)$.

Unicité

S'il existe, le plus grand (resp. plus petit) élément d'une partie est **unique**.

« Maximal » $\neq$ « plus grand »

En ordre *total*, les deux coïncident. Mais en ordre *partiel*, un élément *maximal* n'est pas forcément le *plus grand* : il peut simplement n'avoir personne au-dessus de lui, sans dominer tout le monde. Un plus grand élément est maximal et unique ; il peut exister plusieurs éléments maximaux.

À méditer : $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, |)$

Pour la divisibilité sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, les nombres *premiers* sont exactement les éléments **minimaux** (rien ne les divise à part 1, exclu), et il y en a une infinité : il n'existe donc pas de plus petit élément. Voilà un ordre partiel où « minimal » et « plus petit » diffèrent radicalement.

1.9. Exercices d'application

Exercice 1

Soit x un élément. Décrire en extension $\mathcal{P}(\{x\})$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{x\}))$.

Exercice 2

Décrire en extension $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

Exercice 3

Montrer que : (1) $\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{-1, 1\}$; (2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\} = \{(0, 0)\}$;
 (3) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = |z + 1|\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$.

Exercice 4

Soient $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - xy - 2y^2 = 0\}$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y\}$.

(a) Montrer que $F \subset E$. A-t-on $F = E$? (b) Montrer que $E = F \cup G$ avec G à préciser.

Exercice 5

Soient A, B, C des parties de E . Montrer :

- (1) $\overline{\overline{A}} = A$; (2) $A \subset B \implies \overline{B} \subset \overline{A}$; (3) $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \iff A \cap B = A \cap C$;
 (4) $(A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \implies B = C$.

Exercice 6

Soient A, B, C des parties de E . Montrer que $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$ (associativité de la différence symétrique).

Exercice 7

Soient A, B, C des parties d'un ensemble E . Montrer :

- (1) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; (2) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
 (3) $(A \subset C, B \subset D, C \cap D = \emptyset, A \cup B = C \cup D) \implies (A = C \text{ et } B = D)$.

Exercice 8

Soient A, B, C des parties de E . Montrer :

- (1) $A \triangle B = A \triangle C \implies B = C$; (2) $\overline{A \triangle B} = \overline{A} \triangle \overline{B}$; (3) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

Exercice 9

Soient A, B deux parties de E . Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ les équations d'inconnue X :

- (1) $X \cup A = B$; (2) $X \cap A = B$; (3) $X \setminus A = B$; (4) $X \triangle A = B$.

Exercice 10

Montrer que :

- (1) $([n, n+1])_{n \in \mathbb{Z}}$ est une partition de $\mathbb{R}$;
 (2) pour $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $\left(\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n} \right] \right)_{p \in [0, 2^n - 1]}$ est une partition de $[0, 1[$.

Exercice 11

Soit $f \in \mathcal{F}(E, E)$ telle que $f \circ f = f$ (application *idempotente*). Montrer :

- (1) f injective $\iff f = \operatorname{id}_E$; (2) f surjective $\iff f = \operatorname{id}_E$.

Exercice 12

Soit $f \in \mathcal{F}(E, E)$ telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 13

Les applications suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont-elles injectives, surjectives, bijectives? (1) $x \mapsto x^2 + 2x + 1$; (2) $x \mapsto x^3 + 1$; (3) $x \mapsto \cos x$.

Même question pour $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2x + y, x + y)$.

Exercice 14

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin x$. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}([0, +\infty[)$, $f([0, \pi])$, $f(\{0\})$, $f(\mathbb{R})$.

1.10. Problèmes

Les problèmes qui suivent prolongent le cours vers des thèmes classiques de deuxième période : opérateurs d'ouverture et de fermeture, parties stables, limites de suites d'ensembles, topologie et points d'accumulation, saturation par une relation d'équivalence, clans et tribus, dénombrabilité, filtres. Sauf mention contraire, E désigne un ensemble et, pour $A \subset E$, on note $\bar{A}$ ou ${}^c E A$ le complémentaire de A dans E .

1.10.1 Problème 1 — Ouverture, fermeture et frontière

PROBLÈME 1

Soit E un ensemble; on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . Soit $u : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ une application vérifiant, pour toutes parties A, B de E :

- (1) $u(E) = E$,
- (2) $A \subset B \implies u(A) \subset u(B)$,
- (3) $u(u(A)) = u(A)$,
- (4) $u(A) \subset A$,
- (5) $u(A) \cap u(B) \subset u(A \cap B)$.

u est appelée une **ouverture**; on appelle **ouverts** les éléments de $\mathcal{O} = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid u(A) = A\}$.

1. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que :

- (a) $u(A) \cap u(B) = u(A \cap B)$;
- (b) $u(A) \cup u(B) \subset u(A \cup B)$.

2. Soient $I \neq \emptyset$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{O}$. Montrer que $A = \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{O}$.

3. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, on pose $f(A) = (u(\bar{A}))^c$ (complémentaire dans E). Montrer que f vérifie :

- (a) $f(\emptyset) = \emptyset$ et $f(E) = E$;
- (b) $A \subset f(A)$;
- (c) $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$;
- (d) $f(f(A)) = f(A)$;
- (e) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
- (f) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

f est appelée une **fermeture**; on appelle **fermés** les éléments de $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid f(A) = A\}$.

4. Soient $J \neq \emptyset$ et $(B_i)_{i \in J}$ une famille d'éléments de $\mathcal{F}$.

- (a) Montrer que $B = \bigcap_{i \in J} B_i \in \mathcal{F}$.
- (b) On suppose $J = \llbracket 1, n \rrbracket$ fini ($n \in \mathbb{N}^*$). Montrer que $\bigcup_{i=1}^n B_i \in \mathcal{F}$.

5. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, on pose $\varphi(A) = f(A) \cap f(\overline{A})$; $\varphi(A)$ est la **frontière** de A . Pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$, montrer :
- (a) $\varphi(f(A)) \subset \varphi(A)$;
 - (b) $\varphi(u(A)) \subset \varphi(A)$;
 - (c) $\varphi(A \cup B) \subset \varphi(A) \cup \varphi(B)$.
6. Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $\varphi(A) \in \mathcal{F}$.
7. On suppose φ surjective. Montrer que tout élément de $\mathcal{P}(E)$ est à la fois ouvert et fermé. Que peut-on dire de E ?

1.10.2 Problème 2 — Parties stables par une application

PROBLÈME 2

Soient E un ensemble et $f : E \rightarrow E$. Une partie $X \subset E$ est dite **stable** par f si $f(X) \subset X$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des parties stables par f .

1. Montrer que $\mathcal{S} \neq \emptyset$.
2. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{S}$. Montrer que $\bigcap_{i \in I} A_i$ et $\bigcup_{i \in I} A_i$ appartiennent à $\mathcal{S}$.
3. Soit $A \subset E$; on pose $\mathcal{S}_A = \{X \subset E \mid A \subset X \text{ et } f(X) \subset X\}$.
 - (a) Montrer que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(A) \in \mathcal{S}$, où $f^0 = \text{id}_E$ et $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$.
 - (b) En déduire que $\mathcal{S}_A$ admet un plus petit élément pour l'inclusion, noté $\overline{A}$ (la plus petite partie de E contenant A et stable par f).
4. Exemple : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Déterminer $\overline{A}$ pour $A = \{3\}$ puis $A = [1, 2]$.
- 5.a. Soit $A \subset E$. Montrer que $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ et $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$.
- 5.b. Soient $A, B \subset E$. Montrer : (i) $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$; (ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; (iii) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
- 5.c. Pour $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto n + 1$, déterminer $\overline{\{n\}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et trouver deux parties A, B de $\mathbb{N}$ telles que $\overline{A \cap B} \subsetneq \overline{A} \cap \overline{B}$.

1.10.3 Problème 3 — Limites inférieure et supérieure d'une suite d'ensembles

PROBLÈME 3

Soient $E \neq \emptyset$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de E . On définit

$$\liminf X_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} X_p, \quad \limsup X_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} X_p.$$

La suite (X_n) est dite **convergente** lorsque $\liminf X_n = \limsup X_n$; cette partie commune est alors appelée sa **limite**.

1. Traduire à l'aide des quantificateurs : $x \in \liminf X_n$ et $x \in \limsup X_n$.
2. Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n \subset \liminf X_n \subset \limsup X_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$.

3. Soient (X_n) et (Y_n) deux suites de parties de E . Montrer :
 - (a) $\liminf(X_n \cap Y_n) = (\liminf X_n) \cap (\liminf Y_n)$;
 - (b) $(\liminf X_n) \cap (\liminf Y_n) \subset \limsup(X_n \cap Y_n) \subset (\limsup X_n) \cap (\limsup Y_n)$;
 - (c) $\limsup(X_n \cup Y_n) = (\limsup X_n) \cup (\limsup Y_n)$.
4. Pour $E = \mathbb{R}$ et $X_n = \{n\}$, la suite (X_n) est-elle convergente ?
5. Montrer que si (X_n) est croissante ($\forall n, X_n \subset X_{n+1}$), alors elle converge.
6. Construire une suite de parties non convergente.
7. Montrer que si (X_n) converge, alors $(\overline{X_n})_n$ converge.
8. Montrer que si (X_n) et (Y_n) convergent, alors $(X_n \cap Y_n)$ et $(X_n \cup Y_n)$ convergent.
9. Soient E, F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$.
 - (a) Si (Y_n) est une suite convergente de parties de F , montrer que $(f^{-1}(Y_n))_n$ converge.
 - (b) Exhiber une suite (X_n) convergente de parties de E telle que $(f(X_n))$ ne converge pas.
 - (c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $(f(X_n))$ converge dès que (X_n) converge.

1.10.4 Problème 4 — Espaces topologiques, points d'accumulation

PROBLÈME 4

Définition 1. Soit $E \neq \emptyset$. On appelle **topologie** sur E toute partie $\tau \subset \mathcal{P}(E)$ vérifiant : (1) $\emptyset \in \tau$ et $E \in \tau$; (2) toute réunion d'éléments de τ est dans τ ; (3) $\forall O_1, O_2 \in \tau, O_1 \cap O_2 \in \tau$.
Le couple (E, τ) est un **espace topologique**; les éléments de τ sont les **ouverts** de E .

Question préliminaire. Montrer que toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Partie I — Exemples.

1. Soit $E = \{a, b, c, d, e\}$.
 - (a) $\tau_1 = \{\emptyset, E, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$: montrer que τ_1 est une topologie sur E .
 - (b) $\tau_2 = \{\emptyset, E, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$: justifier que τ_2 n'en est pas une.
2. Soit $E \neq \emptyset$ quelconque.
 - (a) $\mathcal{D} = \mathcal{P}(E)$ est une topologie (**discrète**).
 - (b) $\mathcal{G} = \{\emptyset, E\}$ est une topologie (**grossière**).
3. Soit E infini et $\tau = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid \overline{A} \text{ est fini}\} \cup \{\emptyset\}$. Montrer que τ est une topologie (topologie *cofinie*).
4. Soient τ_1, τ_2 deux topologies sur E . Montrer que $\tau_1 \cap \tau_2$ en est une.

Partie II — Points d'accumulation, fermés.

Définition 2. $x \in E$ est un **point d'accumulation** de $A \subset E$ si $\forall O \in \tau, (O \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Définition 3. $F \subset E$ est **fermée** si $\overline{F} \in \tau$.

5. On reprend τ_1 de la question 1, et $A = \{a, c\}$.
 - (a) Montrer que b est un point d'accumulation de A .
 - (b) Montrer que a n'en est pas un.

6. Pour τ_1 , quels sont les fermés de E ?

7. Dans un espace topologique quelconque, montrer que :

- (a) $\emptyset$ et E sont fermés;
- (b) la réunion de deux fermés est un fermé;
- (c) l'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé.

8.a. Soient F fermé et x un point d'accumulation de F . Montrer que $x \in F$.

8.b. Soit A contenant tous ses points d'accumulation. Montrer que $\forall x \in \bar{A}, \exists O_x \in \tau, x \in O_x \subset \bar{A}$; en déduire que A est fermée.

Définition 4. L'adhérence $\bar{A}$ de A est le plus petit fermé contenant A .

9.a. Montrer que $\bar{A} = \bigcap_{F \text{ fermé}, A \subset F} F$.

9.b. Montrer que A est fermé $\iff A = \bar{A}$.

9. Soit A' l'ensemble des points d'accumulation de A . Montrer que $x \in \bar{A} \iff (x \in A \text{ ou } x \in A')$.

10. Montrer que : (a) $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$; (b) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

1.10.5 Problème 5 — Parties saturées par une relation d'équivalence

PROBLÈME 5

Soient E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E . Une partie $S \subset E$ est **saturée** par $\mathcal{R}$ si $\forall x \in S, \text{cl}(x) \subset S$. Pour $A \subset E$, la **partie saturée engendrée** par A , notée $\text{sat}(A)$, est la plus petite partie saturée contenant A .

1. Montrer que $\text{sat}(A) = \bigcup_{x \in A} \text{cl}(x)$.

2. Soit $f : E \rightarrow E$ telle que $\mathcal{R}$ soit la relation associée à f ($x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$).

(a) Montrer que S est saturée $\iff f^{-1}(f(S)) = S$.

(b) Préciser $\text{sat}(A)$ à l'aide de f .

(c) Montrer qu'il existe une bijection entre les parties saturées de E et les parties de $f(E)$.

1.10.6 Problème 6 — Une relation d'équivalence dans $\mathcal{P}(E)$

PROBLÈME 6

Soient E un ensemble et $H \subset \mathcal{P}(E)$ vérifiant

$$H \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall X, Y \in H, X \triangle Y \in H.$$

On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $\mathcal{R}$ par $X\mathcal{R}Y \iff X \triangle Y \in H$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Pour $X \in \mathcal{P}(E)$, on note $\tilde{X}$ sa classe modulo $\mathcal{R}$.

(a) Déterminer $\tilde{X}$.

(b) Montrer que $\tilde{X}$ est équipotent à H (deux ensembles sont équipotents s'il existe une bijection entre eux).

3. On suppose E fini de cardinal n (donc $\text{Card } \mathcal{P}(E) = 2^n$).
- Établir une relation entre $\text{Card } H$, le nombre de classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ et n .
 - En déduire que $\text{Card } H$ est une puissance de 2.

1.10.7 Problème 7 — Clans, semi-clans et tribus

PROBLÈME 7

Partie I — Clans. Un **clan** de parties de E est une partie non vide $K \subset \mathcal{P}(E)$ telle que (i) $\forall A, B \in K, A \cup B \in K$; (ii) $\forall A, B \in K, A \setminus B \in K$.

- I.1. Vérifier que $\mathcal{P}(E)$ et $\{\emptyset, E\}$ sont des clans.
- I.2. E étant infini, soit K l'ensemble des parties finies de E . Montrer que K est un clan.
- I.3. Soit K un clan. Montrer : (a) $\emptyset \in K$; (b) $A, B \in K \implies A \cap B \in K$; (c) $A, B \in K \implies A \triangle B \in K$.
- I.4. Un clan K est **unitaire** si $E \in K$. Montrer qu'alors $A \in K \implies \bar{A} \in K$.
- I.5. Soit $(K_i)_{i \in I}$ une famille de clans. Montrer que $\bigcap_i K_i$ est un clan.
- I.6. Pour $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$, on pose $K(\mathcal{E}) = \bigcap_{\substack{K \supset \mathcal{E} \\ K \text{ clan unitaire}}} K$.
 - Montrer que $K(\mathcal{E})$ est le plus petit clan unitaire contenant $\mathcal{E}$ (le *clan engendré* par $\mathcal{E}$).
 - Soit K' l'ensemble des $A \subset E$ inclus dans une réunion finie d'éléments de $\mathcal{E}$. Montrer que K' est un clan contenant $\mathcal{E}$; en déduire que $K(\mathcal{E}) \subset K'$ et que tout élément de $K(\mathcal{E})$ est inclus dans une réunion finie d'éléments de $\mathcal{E}$.

Partie II — Semi-clans. Un **semi-clan** est une partie $M \subset \mathcal{P}(E)$ telle que (i) $A, B \in M \implies A \cap B \in M$; (ii) $\forall A, B \in M, \exists A_1, \dots, A_n \in M$ deux à deux disjoints tels que $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^n A_i$. Si de plus $E \in M$, M est unitaire.

- II.1. Montrer que $\emptyset \in M$ et que $\bigcap_{i=1}^n A_i \in M$ pour $A_1, \dots, A_n \in M$.
- II.2.a. Pour $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(B_j)_{1 \leq j \leq m}$, avec $A = \bigcup_i A_i, B = \bigcup_j B_j$, montrer $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^n \bigcap_{j=1}^m (A_i \setminus B_j)$.
- II.2.b. Soit K l'ensemble des réunions finies d'éléments d'un semi-clan M . Montrer que K est un clan.
- II.3. Montrer que $M_d = \{[a, b[\mid a, b \in \mathbb{R}\}$ et $M_g = \{]a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ sont des semi-clans de parties de $\mathbb{R}$.
- II.4. Soit M un semi-clan. Montrer que le clan engendré $K(M)$ est l'ensemble des réunions finies d'éléments de M .

1.10.8 Problème 8 — Ensembles dénombrables

PROBLÈME 8

Un ensemble E est **dénombrable** s'il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$. Deux ensembles sont **équipotents** s'il existe une bijection de l'un sur l'autre.

- Soit A une partie *infinie* de $\mathbb{N}$. On définit $h : \mathbb{N} \rightarrow A$ par $h(0) = \min A$ et $h(n+1) = \min(A \setminus \{h(0), \dots, h(n)\})$.
 - Montrer que h est bien définie.
 - Montrer que h est surjective.

- (c) Montrer que h est injective.
 - (d) En déduire que A et $\mathbb{N}$ sont équipotents.
 - (e) Montrer qu'un ensemble non vide E est dénombrable $\Leftrightarrow$ il existe une injection de E dans une partie infinie de $\mathbb{N}$.
2. Soit $E \neq \emptyset$.
- (a) Montrer que E est dénombrable $\Leftrightarrow$ il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur E .
 - (b) Montrer que toute partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.
3. Soient A, B dénombrables.
- (a) On suppose $A \cap B = \emptyset$. À l'aide d'injections de A dans les entiers pairs et de B dans les entiers impairs, montrer que $A \cup B$ est dénombrable.
 - (b) Traiter le cas $A \cap B \neq \emptyset$.
 - (c) En déduire que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

1.10.9 Problème 9 — Filtres et relations d'équivalence

PROBLÈME 9

Soit $E \neq \emptyset$. Un **filtre** sur E est une partie $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$ telle que

$$(P_0) \mathcal{F} \neq \emptyset; \quad (P_1) \forall X, Y \in \mathcal{F}, X \cap Y \in \mathcal{F}; \quad (P_2) (X \in \mathcal{F}, X \subset Y) \Rightarrow Y \in \mathcal{F}; \quad (P_3) \emptyset \notin \mathcal{F}.$$

Partie I.

1. Que dire d'une famille vérifiant (P_2) mais pas (P_3) ?
2. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est-il un filtre? À quelle condition sur E l'ensemble $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ en est-il un?
3. Montrer que si $\mathcal{F}$ est un filtre, alors $E \in \mathcal{F}$.
4. Pour $A \subset E$ non vide, on pose $\mathcal{F}_A = \{X \subset E \mid A \subset X\}$. Montrer que $\mathcal{F}_A$ est un filtre (le **filtre principal** engendré par A).
5. Montrer que $\varphi : \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathcal{F}(E)$, définie par $\varphi(A) = \mathcal{F}_A$, est injective ($\mathcal{F}(E)$ désignant l'ensemble des filtres sur E).
6. E étant infini, soit $\mathcal{I}_E$ l'ensemble des complémentaires des parties finies de E . Montrer que $\mathcal{I}_E$ est un filtre (le filtre de *Fréchet*).

Partie II.

1. Soit $\mathcal{F}$ un filtre dont l'un des éléments est fini. En considérant $A \in \mathcal{F}$ de cardinal minimal, montrer que $\mathcal{F}$ est principal.
2. (a) En déduire que si E est fini, tout filtre sur E est principal. (b) Qu'en déduit-on pour φ (question I.5)? (c) Quel est le nombre de filtres sur un ensemble à $n \geq 1$ éléments? Donner quelques filtres sur $E = \{a, b, c, d\}$.
3. E étant infini, montrer que $\mathcal{I}_E$ n'est pas principal.

Partie III. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur E . On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $\mathcal{R}$ par $X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{F}, X \cap B = Y \cap B$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Si $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A$ ($A \neq \emptyset$), montrer que $X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow X \cap A = Y \cap A$.
3. Si E est infini et $\mathcal{F} = \mathcal{I}_E$, montrer que $X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow X \triangle Y$ est fini.

Synthèse : les réflexes du chapitre

À emporter en colle

1. **Égalité d'ensembles** : double inclusion, ou double appartenance, ou *indicateurs*.
2. **Identités ensemblistes** : traduire en logique ($\cup \rightarrow$ ou, $\cap \rightarrow$ et, $- \rightarrow$ non) ou calculer sur les $\mathbf{1}_A$.
3. $\cup \leftrightarrow \exists, \cap \leftrightarrow \forall$: toujours écrire la version quantifiée.
4. **Injective** = « $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ » ; **surjective** = « $f(x) = y$ a une solution $\forall y$ » ; **bijjective** = solution unique.
5. **Composée** : l'injectivité remonte vers f (départ), la surjectivité vers g (arrivée).
6. **Image réciproque** respecte $\cup, \cap, -$; **image directe** ne respecte que $\cup$ (et $\subset$).
7. **Équivalence** $\leftrightarrow$ **partition** ; **ordre** : distinguer *maximal* et *plus grand*.

