



Chapitre 1 — Cours

Initiation à la Logique

Le langage de la démonstration : propositions, quantificateurs, connecteurs, lois logiques et grands types de raisonnement.

Terminale Sciences Mathématiques | vers la CPGE

Prof : R. Abed

Plan du chapitre

Chapitre 1 — Cours — Initiation à la Logique	1	Distributivité	12
Introduction, motivation et objectifs	3	Lois de De Morgan	13
Pourquoi la logique? Deux énigmes pour commencer	3	Implication, contraposée, équivalence	14
Place dans le programme et objectifs pédagogiques	3	Les grands types de raisonnement mathématique	15
Comment se construit une théorie mathématique	4	Raisonnement direct et implications successives	15
Propositions, fonctions propositionnelles et quantificateurs	4	Équivalences successives	15
Propositions	4	Raisonnement par contraposée	16
Fonctions propositionnelles	5	Raisonnement par l'absurde	16
Quantificateurs	5	Raisonnement par disjonction de cas .	17
Négation d'une proposition	7	Raisonnement par récurrence	18
Opérations sur les propositions	8	Compléments : histoire, applications et synthèse	19
Conjonction : le connecteur «et»	8	Encart historique — une brève histoire de la logique	19
Disjonction : le connecteur «ou»	8	Applications concrètes	19
Implication	9	Carte mentale du chapitre	20
Équivalence : la double implication	11	Glossaire des termes et notations	20
Lois logiques	12	Auto-évaluation : «Je sais / Je ne sais pas encore»	21
Négation, commutativité, associativité	12	Pour aller plus loin (perspective CPGE)	21

Introduction, motivation et objectifs

« La logique est l'hygiène dont le mathématicien se sert pour garder ses idées saines et vigoureuses » (Hermann Weyl). Née avec Aristote (IV^e siècle av. J.-C.) puis refondée par Boole, De Morgan, Frege et Russell au XIX^e siècle, la logique n'est pas un chapitre parmi d'autres : c'est la grammaire de toutes les mathématiques. Elle fixe ce que veut dire « démontrer », « supposer », « conclure ». Maîtriser ce langage, c'est se donner les moyens de tout le reste du programme.

Remarque — Le mot du chapitre

Il faut faire aujourd'hui ce que tout le monde fera demain.

— Jean Cocteau

Autrement dit : la rigueur logique paraît austère au début, puis devient un réflexe qui fait gagner un temps précieux le jour de l'examen.

1. Pourquoi la logique ? Deux énigmes pour commencer

Avant tout formalisme, la logique est un *art du raisonnement*. Les deux énigmes classiques ci-dessous ne demandent aucune formule : seulement de raisonner juste. Nous y reviendrons à la fin du chapitre, une fois nos outils construits.

Exemple — Le roi et les trois ministres

Un roi dispose de **trois boules blanches** et **deux boules noires**. Il pose une boule sur la tête de chacun de ses trois ministres : chacun voit les deux autres boules, mais pas la sienne. Le premier qui devine *avec certitude* la couleur de sa boule est récompensé. Après un silence, l'un d'eux annonce : « Ma boule est **blanche** ». Comment le sait-il ?

Idée-clé (raisonnement par l'absurde). S'il portait du noir, il ne resterait qu'une boule noire pour les deux autres ; l'un d'eux, voyant une seule boule noire (la sienne éventuelle mise à part) aurait pu conclure plus vite. Le silence prolongé des autres *élimine* ce cas : sa boule est donc blanche. La logique transforme ici un *silence* en information.

Exemple — La file indienne de chapeaux

N personnes sont alignées ; chacune porte un chapeau **rouge** ou **blanc** et ne voit que les chapeaux *devant* elle. En partant de l'arrière, chacune annonce à voix haute une couleur. Une stratégie convenue à l'avance permet de sauver *à coup sûr* au moins $N - 1$ personnes.

Idée-clé (parité). La personne de l'arrière annonce « rouge » si elle voit un nombre *pair* de chapeaux rouges, « blanc » sinon. Chaque personne suivante, en comptant les rouges qu'elle voit et en écoutant les réponses précédentes, en déduit sa propre couleur. C'est une première rencontre avec l'invariant de *parité*, omniprésent en arithmétique.

2. Place dans le programme et objectifs pédagogiques

Ce chapitre ouvre l'année : tout le cours de Terminale SM (analyse, algèbre, arithmétique, nombres complexes) s'appuiera sur les quantificateurs, la négation et les cinq grands types de raisonnement introduits ici.

À retenir — À la fin de ce chapitre, l'élève saura...

- reconnaître une **proposition**, une **fonction propositionnelle**, et manier les **quantificateurs** $\forall$, $\exists$ ainsi que l'ordre dans lequel on les écrit ;
- **nier** rigoureusement une proposition, y compris quantifiée ou composée (lois de De Morgan) ;

- construire et lire les **tables de vérité** des connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\implies$, $\iff$;
- démontrer et utiliser les **lois logiques** (commutativité, associativité, distributivité, De Morgan, contraposée) ;
- choisir et rédiger le bon **raisonnement** : direct, par contraposée, par l'absurde, par disjonction de cas, par récurrence.

Rappel de cours

On suppose connus : les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$; les notions d'*appartenance* ($\in$), d'*intervalle*, de *divisibilité* dans $\mathbb{Z}$; le calcul sur les inégalités, la valeur absolue et les racines carrées ; les identités remarquables. Aucune connaissance préalable de logique formelle n'est requise.

3. Comment se construit une théorie mathématique

Un cours de mathématiques n'est pas une liste de recettes : c'est un **édifice déductif**. Tout part d'*axiomes* (admis), puis de *définitions* (qui fixent le vocabulaire) ; de là on démontre des *propositions*, des *théorèmes* (résultats majeurs), à l'aide éventuelle de *lemmes* (étapes intermédiaires), et l'on en tire des *corollaires* (conséquences directes). Les *conjectures* sont les énoncés encore non démontrés. La figure ci-dessous en donne la carte.

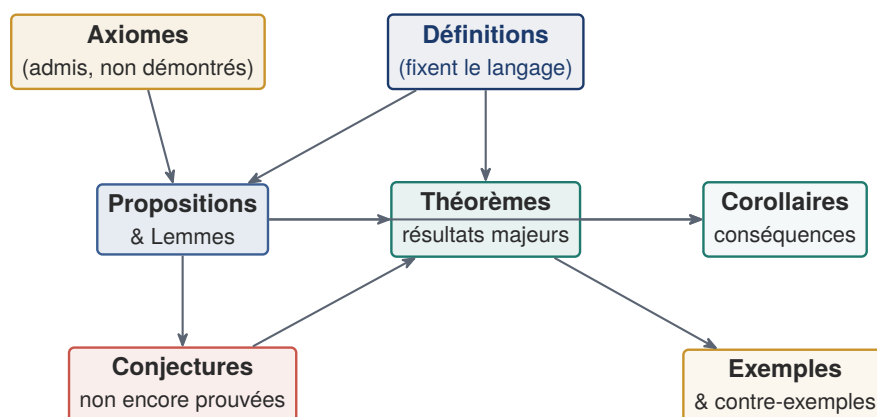


Figure 1 — L'architecture déductive d'une théorie mathématique.

Astuce — Trois exemples pour fixer les idées

Axiome : «par deux points distincts passe une unique droite» (géométrie d'Euclide).
Définition : un entier $p \geq 2$ est *premier* s'il n'a pas d'autre diviseur positif que 1 et lui-même.
Conjecture : tout entier pair > 2 est somme de deux nombres premiers (Goldbach, toujours ouverte en 2025).

Propositions, fonctions propositionnelles et quantificateurs

4. Propositions

Définition — Proposition

Une **proposition** (ou *assertion*) est un énoncé mathématique qui est **soit vrai, soit faux** — jamais les deux, jamais aucun des deux (principe du *tiers exclu* et de *non-contradiction*). On appelle **valeur de vérité** de la proposition le fait qu'elle soit vraie (**V**) ou fausse (**F**).

Remarque

On note usuellement les propositions par des lettres majuscules $P, Q, R, \dots$. Un énoncé comme « $x^2 = 4$ » n'est *pas* une proposition tant que x n'est pas fixé : sa vérité dépend de x . C'est l'objet du paragraphe suivant.

Exemple

- $P : (\sqrt{9} = 3)$ est une proposition **vraie** (car $3 \geq 0$ et $3^2 = 9$).
- $Q : (\sqrt{16} = -4)$ est une proposition **fausse** : par convention $\sqrt{16} = 4 \geq 0$.
- Pour un carré $ABCD$ du plan, « $ABCD$ est un parallélogramme» et « $ABCD$ est un rectangle» sont deux propositions **vraies** (tout carré est à la fois l'un et l'autre).

Piège à éviter — Un énoncé n'est pas toujours une proposition

«Ce nombre est grand», « $x + 1$ » ou «Quelle heure est-il?» ne sont pas des propositions : la première est *subjective*, la deuxième est une *expression* (pas un énoncé affirmatif), la troisième est une *question*. Une proposition doit pouvoir être déclarée vraie ou fausse sans ambiguïté.

5. Fonctions propositionnelles

Définition — Fonction propositionnelle

Soit E un ensemble. Un énoncé $P(x)$ dont la valeur de vérité dépend de la variable $x \in E$ est appelé **fonction propositionnelle** (ou *prédicat*) sur E . Pour chaque valeur particulière $a \in E$, $P(a)$ est une proposition.

Exemple — Une variable

Sur $E = \mathbb{R}$, posons $P(x) : (x^2 - 3x + 2 \geq 0)$. Comme $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$, la proposition $P(x)$ est vraie exactement pour $x \leq 1$ ou $x \geq 2$. On obtient :

a	0	$\frac{1}{2}$	1	-2	$\frac{3}{4}$
$(a - 1)(a - 2)$	2	$\frac{3}{4}$	0	12	$\frac{5}{16}$
$P(a)$	V	V	V	V	V

En revanche $P(\frac{3}{2})$ serait **F** car $(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4} < 0$: c'est un **contre-exemple** utile pour délimiter le domaine de vérité.

Exemple — Deux variables

Sur $E = \mathbb{R}^2$, posons $Q(x, y) : (x - 2y \geq 1)$. Alors :

$$Q(0, 0) : \mathbf{F} \quad (0 \geq 1 \text{ faux}), \quad Q(1, 0) : \mathbf{V} \quad (1 \geq 1), \quad Q(1, 1) : \mathbf{F} \quad (-1 \geq 1 \text{ faux}),$$

$$Q(2, 1) : \mathbf{F} \quad (0 \geq 1 \text{ faux}), \quad Q(0, 1) : \mathbf{F} \quad (-2 \geq 1 \text{ faux}).$$

6. Quantificateurs

Une fonction propositionnelle devient une proposition dès qu'on *quantifie* sa variable, c'est-à-dire qu'on précise « pour tout » ou « il existe ».

Définition — Quantificateur existentiel

Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle sur un ensemble non vide E . La proposition « **il existe au moins un** $x \in E$ tel que $P(x)$ est vraie » se note

$$\exists x \in E, P(x).$$

Elle est vraie dès qu'une valeur de E convient.

Définition — Quantificateur universel

Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle sur un ensemble non vide E . La proposition « **pour tout** $x \in E$, $P(x)$ est vraie » se note

$$\forall x \in E, P(x).$$

Elle est vraie lorsque *toutes* les valeurs de E conviennent, et fausse dès qu'une seule ne convient pas.

Exemple

Avec $P(x) : x^2 - 3x + 2 \geq 0$ et $Q(x) : x^2 + 1 = 0$ et $R(x) : x^2 + 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$:

- $\exists x \in \mathbb{R}$, $P(x)$ est **vraie** : par exemple $x = 0$ donne $2 \geq 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x)$ est **fausse** : $x = \frac{3}{2}$ donne $-\frac{1}{4} \geq 0$, faux (contre-exemple).
- $\exists x \in \mathbb{R}$, $Q(x)$ est **fausse** : $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ pour tout réel, jamais nul.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $R(x)$ est **vraie** : $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ pour tout réel.

Astuce — Pour prouver / pour réfuter

Pour prouver un « $\exists$ », il suffit d'**exhiber un exemple**. Pour réfuter un « $\forall$ », il suffit d'**exhiber un contre-exemple**. En revanche, prouver un « $\forall$ » exige un raisonnement *général* (valable pour tout x), et réfuter un « $\exists$ » exige de montrer qu'*aucune* valeur ne convient.

Propriété — L'ordre des quantificateurs compte

Soit $P(x, y)$ une fonction propositionnelle à (au moins) deux variables.

1. Si l'on échange deux quantificateurs de **natures différentes** ($\forall$ et $\exists$), le sens — et donc la valeur de vérité — de la proposition **peut changer**.
2. Si l'on échange deux quantificateurs de **même nature** ($\forall\forall$ ou $\exists\exists$), le sens **ne change pas**.

Exemple — L'ordre $\forall\exists$ contre $\exists\forall$

Sur $\mathbb{R}^2$, soit $P(x, y) : x + y \leq 1$.

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$, $P(x, y)$ est **vraie** : x étant donné, on choisit $y = 1 - x$ (dépendant de x), d'où $x + y = 1 \leq 1$.
- $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$, $P(x, y)$ est **fausse** : aucun y fixe ne peut convenir pour tout x , car $x = 2 - y$ donne $x + y = 2 > 1$.

Échanger $\forall$ et $\exists$ a bien renversé la vérité. La figure 2 illustre pourquoi.

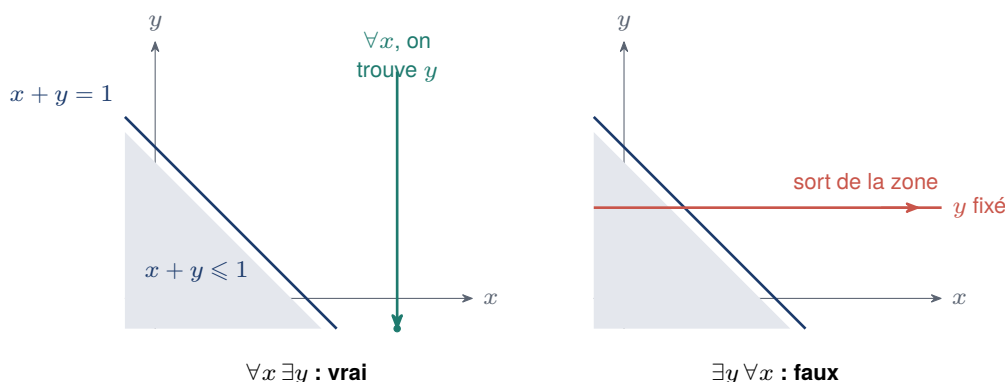


Figure 2 — Pour $P(x, y) : x + y \leq 1$: à gauche, chaque x admet un y convenable ; à droite, aucun y fixe ne convient pour tout x .

Exemple — Quantificateurs de même nature

Sur $\mathbb{R}^2$, soit $P(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1$. Alors $\forall x \forall y, P(x, y)$ et $\forall y \forall x, P(x, y)$ ont **le même sens** — et sont toutes deux **fausses** (prendre $x = y = 1 : 2 \leq 1$ faux). De même $\exists x \exists y, P(x, y)$ et $\exists y \exists x, P(x, y)$ sont identiques et **vraies** (prendre $x = y = 0$).

Négation d'une proposition

Définition — Négation

La **négation** d'une proposition P est la proposition, notée $\overline{P}$ (lire «non P », aussi notée $\neg P$), qui est **fausse** lorsque P est **vraie**, et **vraie** lorsque P est **fausse**.

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Table de vérité de la négation.

Exemple

- $P : (3 > 2)$ est **vraie** ; sa négation $\overline{P} : (3 \leq 2)$ est **fausse**.
- $Q : (1 + 5 = 6)$ est **vraie** ; $\overline{Q} : (1 + 5 \neq 6)$ est **fausse**.
- $R : (\frac{0}{5} = 0)$ est **vraie** ; $\overline{R} : (\frac{0}{5} \neq 0)$ est **fausse**.
- $S : (\sqrt{49} = -7)$ est **fausse** (car $\sqrt{49} = 7$) ; $\overline{S} : (\sqrt{49} \neq -7)$ est **vraie**.

Propriété — Négation de la négation

Pour toute proposition P , on a $\overline{\overline{P}} \equiv P$: nier deux fois revient à ne rien nier. On dit que P et $\overline{\overline{P}}$ sont **équivalentes**.

P	$\overline{P}$	$\overline{\overline{P}}$
V	F	V
F	V	F

La colonne $\overline{\overline{P}}$ reproduit exactement la colonne P .

Propriété — Négation des propositions quantifiées

Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle sur un ensemble E . On a :

$$\neg(\forall x \in E, P(x)) \iff (\exists x \in E, \neg P(x)), \quad \neg(\exists x \in E, P(x)) \iff (\forall x \in E, \neg P(x)).$$

Nier un quantificateur, c'est l'échanger et nier ce qui suit.

Méthode — Nier une proposition composée, pas à pas

Pour écrire la négation d'un énoncé quantifié :

- remplacer chaque $\forall$ par $\exists$ et chaque $\exists$ par $\forall$, dans l'ordre ;
- nier enfin la fonction propositionnelle finale (une inégalité $\leq$ devient $>$, un $=$ devient $\neq$, etc.).

Exemple : la négation de $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, (|x - a| < \eta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon)$ est

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x, (|x - a| < \eta \text{ et } |f(x) - \ell| \geq \varepsilon).$$

(On anticipe ici la définition de la limite, vue plus tard : la logique en est la clé.)

Piège à éviter — Deux erreurs très fréquentes

La négation de « $\forall x, P(x)$ » n'est **pas** « $\forall x, \neg P(x)$ » mais « $\exists x, \neg P(x)$ ».

De même, la négation de « $a < b$ » est « $a \geq b$ » (et non « $a > b$ ») : ne pas oublier le cas d'égalité.

Opérations sur les propositions

À partir de deux propositions P et Q , on fabrique de nouvelles propositions à l'aide des **connecteurs** logiques. Chacun est entièrement défini par sa *table de vérité*.

7. Conjonction : le connecteur « et »

Définition — Conjonction

La **conjonction** de P et Q , notée $P \wedge Q$ (lire « P et Q »), est vraie **lorsque P et Q sont toutes deux vraies**, et fausse dans tous les autres cas.

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple

- $(-4 < 0 \text{ et } -4 \times 0 = 0)$ est **vraie** : les deux membres sont vrais.
- $((-3)^2 \leq 1 \text{ et } \sqrt{1} = 1)$ est **fausse** : $9 \leq 1$ est faux.
- $((-3)^2 \leq 1 \text{ et } \sqrt{4} = -2)$ est **fausse** : les deux membres sont faux.

8. Disjonction : le connecteur « ou »

Définition — Disjonction

La **disjonction** de P et Q , notée $P \vee Q$ (lire « P ou Q »), est vraie lorsqu'**au moins une** des deux propositions est vraie, et fausse seulement si les deux sont fausses.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Astuce — « ou » inclusif, pas exclusif

En mathématiques, «ou» est toujours **inclusif** : $P \vee Q$ est vraie même quand P et Q le sont (première ligne du tableau). Le «ou» exclusif du langage courant («fromage ou dessert») n'est pas le $\vee$ mathématique.

Exemple

- $(-4 < 0 \text{ ou } -4 \times 0 = 0)$ est **vraie** (les deux membres le sont d'ailleurs).
- $((-3)^2 \leq 1 \text{ ou } \sqrt{1} = 1)$ est **vraie** : le second membre suffit.
- $((-3)^2 \leq 1 \text{ ou } \sqrt{4} = -2)$ est **fausse** : les deux membres sont faux.

9. Implication

Définition — Implication

L'**implication** $P \Rightarrow Q$ (lire « P implique Q ») est la proposition **fausse uniquement lorsque P est vraie et Q fausse**, et vraie dans tous les autres cas.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarque — Le « faux implique tout »

Si P est **fausse**, l'implication $P \Rightarrow Q$ est **vraie** quelle que soit Q (deux dernières lignes). Si P est vraie, alors la vérité de $P \Rightarrow Q$ équivaut à celle de Q . C'est pourquoi, pour *démontrer* une implication, on suppose P vraie et l'on cherche à établir Q .

Méthode — Démontrer une implication $P \Rightarrow Q$

On **suppose** P vraie (hypothèse), puis, par déductions successives, on **montre** que Q est vraie. On n'a jamais à traiter le cas « P faux» : l'implication y est automatiquement vraie.

Exemple — Implications géométriques

Pour un quadrilatère $ABCD$ du plan :

- $(ABCD \text{ carré} \Rightarrow ABCD \text{ rectangle})$: **vraie** (tout carré est un rectangle).
- $(ABCD \text{ rectangle} \Rightarrow ABCD \text{ parallélogramme})$: **vraie**.
- $(ABCD \text{ rectangle} \Rightarrow ABCD \text{ carré})$: **fausse** (contre-exemple : un rectangle 2×3).
- $(ABCD \text{ parallélogramme} \Rightarrow ABCD \text{ rectangle})$: **fausse**.

Exemple — Implications numériques

- $(-4 < 0 \Rightarrow -4 \times 0 = 0)$: **vraie** (P vraie, Q vraie).
- $(-4 > 0 \Rightarrow -4 \times 0 = 0)$: **vraie** (P fausse : « faux implique tout »).
- $((-3)^2 \leq 1 \Rightarrow \sqrt{1} = 1)$: **vraie** (P fausse).
- $((-3)^2 \leq 1 \Rightarrow \sqrt{4} = -2)$: **vraie** (P fausse).

Définition — Condition nécessaire, condition suffisante

On suppose l'implication $P \Rightarrow Q$ **vraie**. Alors :

- P est une **condition suffisante** de Q (il suffit que P soit vraie pour que Q le soit) ;
- Q est une **condition nécessaire** de P (il faut que Q soit vraie pour que P puisse l'être).

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'implication $(6 \mid n \Rightarrow 3 \mid n)$ est **vraie** : si $6 \mid n$, alors $n = 6k = 3(2k)$, donc $3 \mid n$. Ainsi « $6 \mid n$ » est *suffisante* pour « $3 \mid n$ », et « $3 \mid n$ » est *nécessaire* à « $6 \mid n$ ». (La réciproque est fausse : $3 \mid 9$ mais $6 \nmid 9$.)

Définition — Implication réciproque

La **réciproque** de l'implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $Q \Rightarrow P$. En général, une implication et sa réciproque **n'ont pas la même valeur de vérité**.

Piège à éviter — Ne jamais confondre une implication et sa réciproque

$(ABCD \text{ rectangle} \Rightarrow ABCD \text{ parallélogramme})$ est vraie, mais sa réciproque $(ABCD \text{ parallélogramme} \Rightarrow ABCD \text{ rectangle})$ est **fausse**. Confondre les deux est l'une des fautes les plus coûteuses à l'examen.

Exemple — Deux implications à démontrer

(a) Pour $x \in \mathbb{R} : x \in]-1, 1] \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} \leq 0$.

Preuve. Supposons $-1 < x \leq 1$. Alors $x-1 \leq 0$ et $x+1 > 0$, donc le quotient $\frac{x-1}{x+1}$ est le rapport d'un nombre ≤ 0 par un nombre > 0 : il est ≤ 0 . ■

(b) Pour $x \in \mathbb{R} : x \in]-\infty, -1] \Rightarrow x^2 - x - 2 \geq 0$.

Preuve. On factorise $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$. Si $x \leq -1$, alors $x-2 \leq -3 < 0$ et $x+1 \leq 0$; le produit de deux facteurs de même signe (négatifs ou nuls) est ≥ 0 . ■

Remarque — Correction d'un énoncé source

L'énoncé initial concluait ici « $x^2 - x - 2 \leq 0$ » : c'est **inexact**. Par exemple $x = -2 \leq -1$ donne $x^2 - x - 2 = 4 > 0$. La conclusion correcte est bien $x^2 - x - 2 \geq 0$ (vérifié pour $x \leq -1$).

10. Équivalence : la double implication

Définition — Équivalence

L'**équivalence** $P \Leftrightarrow Q$ (lire « P équivaut à Q ») est vraie lorsque P et Q ont la **même valeur de vérité**, et fausse sinon.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple

- $(|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ est **vraie** : les deux membres sont vrais ($\sqrt{2} > 1$ donne $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$, et $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$).
- $(1 + \sqrt{3}^2 = 4) \Leftrightarrow (12 = 2^2 \times 3^2)$ est **fausse** : le premier membre est vrai ($1 + 3 = 4$), le second est faux ($2^2 \times 3^2 = 36 \neq 12$).
- $(1 + \sqrt{3}^2 = 5) \Leftrightarrow (12 = 2^2 \times 3^2)$ est **vraie** : les deux membres sont faux ($4 \neq 5$ et $36 \neq 12$).

Propriété — Équivalence = double implication

La proposition $P \Leftrightarrow Q$ est vraie si et seulement si les deux implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ sont vraies. Ainsi, pour démontrer une équivalence, il suffit (et il faut) de prouver les **deux implications** :

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)].$$

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Les colonnes 3 et 6 sont identiques : la propriété est démontrée.

Exemple — Deux équivalences à démontrer

(a) Pour $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x = 5$.

Preuve. ($\Leftarrow$) Si $x = 5$, alors $\sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2$. ($\Rightarrow$) Si $\sqrt{x-1} = 2$, l'expression impose $x-1 \geq 0$; en élevant au carré (les deux membres étant ≥ 0) : $x-1 = 4$, donc $x = 5$. ■

(b) Pour $a, b \in \mathbb{R}$: $|a + b| = |1 + ab| \iff (|a| = 1 \text{ ou } |b| = 1)$.

Preuve. Les deux membres étant positifs, $|a + b| = |1 + ab| \iff (a + b)^2 = (1 + ab)^2$. En développant :

$$a^2 + 2ab + b^2 = 1 + 2ab + a^2b^2 \iff a^2 + b^2 - 1 - a^2b^2 = 0 \iff (a^2 - 1)(1 - b^2) = 0,$$

car $a^2 + b^2 - 1 - a^2b^2 = a^2(1 - b^2) - (1 - b^2) = (a^2 - 1)(1 - b^2)$. Ce produit est nul si et seulement si $a^2 = 1$ ou $b^2 = 1$, c'est-à-dire $|a| = 1$ ou $|b| = 1$. ■

Lois logiques

Les **lois logiques** sont des équivalences *toujours vraies* (des *tautologies*) : elles se démontrent en vérifiant que deux colonnes d'une table de vérité coïncident ligne par ligne. Elles autorisent à *transformer* une proposition sans en changer la vérité — l'outil de base de toute démonstration.

11. Négation, commutativité, associativité

Théorème — Double négation et commutativité

Pour toutes propositions P, Q :

$$\overline{\overline{P}} \iff P, \quad (P \wedge Q) \iff (Q \wedge P), \quad (P \vee Q) \iff (Q \vee P).$$

P	Q	$P \wedge Q$	$Q \wedge P$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

Colonnes 3 et 4 identiques : $\wedge$ est commutative. Idem

pour $\vee$.

Théorème — Associativité

Pour toutes propositions P, Q, R :

$$P \wedge (Q \wedge R) \iff (P \wedge Q) \wedge R, \quad P \vee (Q \vee R) \iff (P \vee Q) \vee R.$$

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \vee (Q \vee R)$	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \vee R$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	F	F	F	F

Colonnes 5 et 7 identiques : $\vee$ est associative. La preuve pour $\wedge$ est analogue.

12. Distributivité

Théorème — Distributivité

Pour toutes propositions P, Q, R :

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \quad P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$$

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Colonnes 5 et 8 identiques : $\wedge$ est distributive sur $\vee$. La seconde formule se prouve de même.

Remarque — Correction d'une coquille de l'énoncé source

On prendra garde : la distributivité de $\wedge$ sur $\vee$ s'écrit bien $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$, avec un $\wedge$ dans *chaque* parenthèse de droite (et non un $\vee$).

13. Lois de De Morgan

Théorème — De Morgan

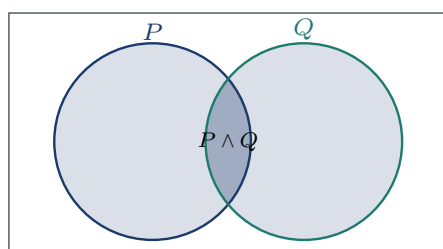
Pour toutes propositions P, Q :

$$\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}, \quad \overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}.$$

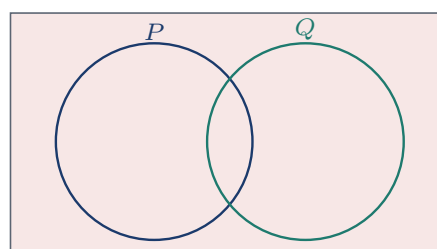
« La négation échange $\wedge$ et $\vee$. »

P	Q	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \vee \overline{Q}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Colonnes 4 et 7 identiques : $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$. La seconde loi se vérifie par la même méthode.



Zone bleue foncée : $P \wedge Q$



Zone corail : $\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$

Figure 3 — Lecture ensembliste de De Morgan : le complémentaire de l'intersection est la réunion des complémentaires.

14. Implication, contraposée, équivalence

Théorème — Trois lois majeures

Pour toutes propositions P, Q :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q), \quad (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}), \quad (P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q}).$$

La proposition $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est appelée **contraposée** de $P \Rightarrow Q$.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P}$	$\overline{P} \vee Q$	$\overline{Q}$	$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
V	V	V	F	V	F	V
V	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Les colonnes $P \Rightarrow Q$, $\overline{P} \vee Q$ et $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ coïncident : les trois formes sont équivalentes.

Boîte à outils — Formulaire des lois logiques — à mémoriser

- Double négation : $\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$
- Commutativité : $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$; $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
- Associativité : $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$
- Distributivité : $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
- De Morgan : $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$
- De Morgan : $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$
- Implication : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$
- Négation d'implication : $\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow (P \wedge \overline{Q})$
- Contraposée : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$
- Équivalence : $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)]$

Astuce — Nier une implication

En combinant $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$ avec De Morgan, on obtient une formule d'or :

$$\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}.$$

La négation de «si P alors Q » est « P et pourtant non Q ». C'est exactement ce qu'on cherche dans un raisonnement par l'absurde.

Exemple — Deux applications des lois logiques

(a) **Implication.** Pour $x, y \in \mathbb{R}$: $(x \neq y \text{ et } xy \neq 1) \Rightarrow \frac{x}{x^2+1} \neq \frac{y}{y^2+1}$.

Preuve par contraposée. Supposons $\frac{x}{x^2+1} = \frac{y}{y^2+1}$. Les dénominateurs étant strictement positifs, on multiplie en croix :

$$x(y^2+1) = y(x^2+1) \Leftrightarrow xy^2 + x - x^2y - y = 0 \Leftrightarrow (y-x)(xy-1) = 0,$$

d'où $x = y$ ou $xy = 1$. On a donc nié « $x \neq y$ et $xy \neq 1$ » : la contraposée est établie, l'implication est vraie. ■

(b) **Équivalence.** Pour $x, y \in \mathbb{R}$: $(x \neq y \text{ et } xy \neq 1) \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1}$.

Preuve. Comme $t^2 + t + 1 = (t + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$, les dénominateurs ne s'annulent jamais. On

calcule :

$$\frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{y}{y^2 + y + 1} \Leftrightarrow x(y^2 + y + 1) = y(x^2 + x + 1) \\ \Leftrightarrow (y - x)(xy - 1) = 0 \Leftrightarrow (x = y \text{ ou } xy = 1).$$

En niant les deux membres de cette équivalence, on obtient exactement l'énoncé. ■

Remarque — Correction des énoncés sources

Ces deux énoncés figuraient avec « $x \neq y$ ou $xy \neq 1$ » : c'est **faux**. Contre-exemple : $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$ vérifient $x \neq y$ (donc « ou » vrai) et pourtant $\frac{x}{x^2+1} = \frac{2}{5} = \frac{1/2}{5/4} = \frac{y}{y^2+1}$. Le bon connecteur en hypothèse est « **et** » (négation, via De Morgan, de « $x = y$ ou $xy = 1$ »).

Les grands types de raisonnement mathématique

Démontrer, c'est enchaîner des implications vraies depuis les hypothèses jusqu'à la conclusion. Il existe cinq grandes *stratégies*. Savoir choisir la bonne est aussi important que savoir calculer.

15. Raisonnement direct et implications successives

Théorème — Transitivité de l'implication

Pour toutes propositions P , Q , R :

$$[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R).$$

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$	Th.
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

La dernière colonne (l'implication du théorème) ne contient que des V : c'est une tautologie.

Méthode — Raisonnement direct

Pour montrer $P \Rightarrow R$, on part de P et l'on construit une **chaîne d'implications vraies** $P \Rightarrow Q_1 \Rightarrow Q_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow R$. Chaque flèche doit être justifiée. La transitivité garantit alors $P \Rightarrow R$.

Exemple

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrons $a^3 + b^3 < 1 < a + b \Rightarrow (0 < a < 1 \text{ et } 0 < b < 1)$ — un grand classique traité en *Problème de synthèse* n°1 plus loin, où l'on combine raisonnement direct et encadrements. On y verra que la difficulté n'est pas le formalisme, mais le *choix* des inégalités à enchaîner.

16. Équivalences successives

Théorème — Transitivité de l'équivalence

Pour toutes propositions P , Q , R :

$$[(P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R)] \Rightarrow (P \Leftrightarrow R).$$

Méthode — Résoudre par équivalences

Pour résoudre une équation ou une inéquation, on transforme l'énoncé par **équivalences** $\Leftrightarrow$ (et non de simples implications), jusqu'à une forme dont l'ensemble des solutions est évident. Si une étape n'est qu'une implication (élévation au carré, par exemple), il faudra *vérifier les solutions* à la fin.

Exemple — Une résolution par équivalences

Réolvons dans $\mathbb{R}$: $\left| \frac{2x}{x^2 + 1} \right| = 1 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = -1).$

Preuve. Comme $x^2 + 1 > 0$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{2x}{x^2 + 1} \right| = 1 &\Leftrightarrow |2x| = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2|x| + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (|x| - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = -1). \end{aligned}$$

Chaque étape est une *équivalence* : l'ensemble des solutions est $\{-1, 1\}$. ■

17. Raisonnement par contraposée

À retenir — Principe

Pour démontrer $P \Rightarrow Q$, on peut démontrer sa **contraposée** $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$, qui lui est équivalente. On y gagne lorsque « nier Q » offre une hypothèse plus maniable que P .

Méthode — Rédaction type

On écrit : « Montrons la contraposée $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$. Supposons $\overline{Q}$... donc $\overline{P}$. Par contraposition, $P \Rightarrow Q$. »

Exemple — Deux implications par contraposée

(a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ non opposés ($|a| \neq |b|$, donc $a + b \neq 0$). Montrons $a \neq -2b \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} \neq 3$.

Contraposée. Supposons $\frac{a-b}{a+b} = 3$. Alors $a - b = 3(a + b)$, d'où $-2a = 4b$, c'est-à-dire $a = -2b$. On a bien nié la conclusion pour obtenir la négation de l'hypothèse. ■

Correction de l'énoncé source. La bonne hypothèse est $a \neq -2b$ (et non $a \neq -\frac{1}{2}b$) : en effet $\frac{a-b}{a+b} = 3 \Leftrightarrow a = -2b$.

(b) Soit $x \in]-1, +\infty[$. Montrons $x \neq 0 \Rightarrow \sqrt{1+x} \neq 1 + \frac{x}{2}$.

Contraposée. Supposons $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2}$. Le membre de droite vaut $1 + \frac{x}{2} \geq 0$ (car $x > -1$), donc on peut élever au carré : $1 + x = 1 + x + \frac{x^2}{4}$, d'où $\frac{x^2}{4} = 0$, soit $x = 0$. ■

18. Raisonnement par l'absurde

Théorème — Principe du raisonnement par l'absurde

Pour toutes propositions P, Q :

$$[(\overline{P} \Rightarrow Q) \wedge (\overline{P} \Rightarrow \overline{Q})] \Rightarrow P.$$

Autrement dit : si supposer $\overline{P}$ conduit à une **contradiction** (à la fois Q et $\overline{Q}$), alors P est vraie.

Méthode — Rédaction type

On écrit : «*Supposons par l'absurde $\overline{P}$.*» On déduit alors une **absurdité** (un énoncé et sa négation, ou une contradiction avec une hypothèse ou un fait connu). On conclut : «*Contradiction ; donc P .*»

Exemple — Un triangle qui n'est pas rectangle

Soit $a > 0$. Dans le plan, ABC vérifie $AB = 3a, AC = 4a, BC = 6a$. Montrons que ABC n'est pas rectangle.

Preuve par l'absurde. Supposons ABC rectangle. Le plus grand côté est $BC = 6a$, donc l'angle droit serait en A et le théorème de Pythagore donnerait $BC^2 = AB^2 + AC^2$, soit $36a^2 = 9a^2 + 16a^2 = 25a^2$. Comme $a > 0$, on simplifie par a^2 : $36 = 25$, **absurde**. Donc ABC n'est pas rectangle. ■

Exemple — L'irrationalité de $\sqrt{2}$ — le joyau du chapitre

Montrons que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Preuve par l'absurde. Supposons $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. On écrit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et la fraction **irréductible** ($p \wedge q = 1$). En élevant au carré : $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est pair, donc p est pair (car le carré d'un impair est impair) : $p = 2p'$. Alors $4p'^2 = 2q^2$, soit $q^2 = 2p'^2$: q^2 est pair, donc q est pair. Ainsi $2 \mid p$ et $2 \mid q$, ce qui contredit $p \wedge q = 1$. **Absurde**. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. ■

19. Raisonnement par disjonction de cas**Théorème — Principe de la disjonction de cas**

Pour toutes propositions P, Q, R :

$$[(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow [(P \vee Q) \Rightarrow R].$$

Si R découle de P et découle aussi de Q , alors R découle de « P ou Q ».

Méthode — Découper l'ensemble d'étude

On partitionne l'ensemble des valeurs de la variable en **cas exhaustifs** (leur réunion couvre tout), on résout dans chaque cas, puis on **réunit** les conclusions. Typique des valeurs absolues, des racines et des inéquations.

Exemple — Une équation avec valeurs absolues

Résolvons dans $\mathbb{R}$: $|x - 1| + |2x - 3| = 6$.

Preuve. Les points critiques sont $x = 1$ et $x = \frac{3}{2}$. Trois cas :

- Si $x < 1$: $(1 - x) + (3 - 2x) = 6 \Leftrightarrow 4 - 3x = 6 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$. Comme $-\frac{2}{3} < 1$, la solution convient.
- Si $1 \leq x < \frac{3}{2}$: $(x - 1) + (3 - 2x) = 6 \Leftrightarrow 2 - x = 6 \Leftrightarrow x = -4$. Or $-4 \notin [1, \frac{3}{2}[$: pas de

solution.

- Si $x \geq \frac{3}{2}$: $(x-1) + (2x-3) = 6 \Leftrightarrow 3x-4 = 6 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$. Comme $\frac{10}{3} \geq \frac{3}{2}$, la solution convient.

La réunion des cas donne $S = \{-\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\}$. ■

Exemple — Une inéquation avec racine

Réolvons dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{2x^2+1} > 2x-4$.

Preuve. Le membre de gauche est toujours défini et strictement positif ($2x^2+1 \geq 1$). Deux cas selon le signe de $2x-4$:

- Si $x < 2$: $2x-4 < 0 < \sqrt{2x^2+1}$: l'inéquation est *toujours vraie*. Tout $x < 2$ convient.
- Si $x \geq 2$: les deux membres sont ≥ 0 , on peut élever au carré : $2x^2+1 > (2x-4)^2 = 4x^2-16x+16$, soit $2x^2-16x+15 < 0$. Les racines sont $x = \frac{8 \pm \sqrt{34}}{2}$; l'inéquation vaut pour $\frac{8-\sqrt{34}}{2} < x < \frac{8+\sqrt{34}}{2}$. En intersectant avec $x \geq 2$ (et comme $\frac{8-\sqrt{34}}{2} \approx 1,08 < 2$) : $2 \leq x < \frac{8+\sqrt{34}}{2}$.

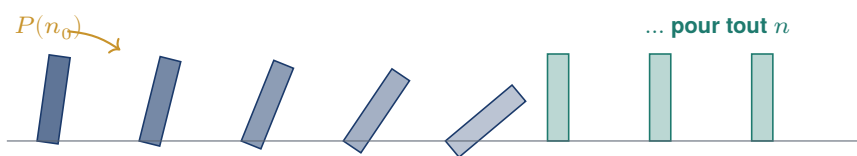
La réunion des deux cas donne $S = \left] -\infty, \frac{8+\sqrt{34}}{2} \right[$ (avec $\frac{8+\sqrt{34}}{2} \approx 6,92$). ■

20. Raisonnement par récurrence

Théorème — Principe de récurrence

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une propriété dépendant de l'entier $n \geq n_0$. Si

- Initialisation** : $P(n_0)$ est vraie ;
- Hérédité** : pour tout $n \geq n_0$, l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie ;
alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.



L'hérédité $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ propage la chute

Figure 4 — L'image des dominos : on fait tomber le premier (initialisation), et chaque domino fait tomber le suivant (hérédité).

Méthode — Rédaction en trois temps

(1) **Initialisation** : vérifier $P(n_0)$. (2) **Hérédité** : supposer $P(n)$ vraie pour un $n \geq n_0$ fixé (*hypothèse de récurrence*), puis démontrer $P(n+1)$. (3) **Conclusion** : « par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$ ».

Exemple — La somme des premiers entiers

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n := \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation. Pour $n = 1$: $S_1 = 1$ et $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. Vrai.

Hérédité. Supposons $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour un $n \geq 1$. Alors

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

qui est bien la formule au rang $n+1$.

Conclusion. Par récurrence, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \geq 1$. ■

Piège à éviter — L'hérédité seule ne suffit pas

Sans initialisation, une propriété peut être « héréditaire » tout en étant *toujours fausse* : par exemple « $P(n) : 10^n + 1$ est divisible par 9 » vérifie $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (car $10^{n+1} + 1 = 10(10^n + 1) - 9$), mais $P(0)$ est faux, donc $P(n)$ est faux pour tout n . Les deux piliers sont *indispensables*.

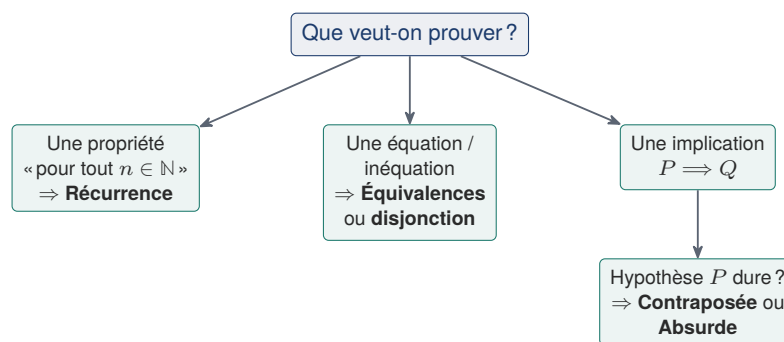


Figure 5 — Un arbre de décision pour choisir sa stratégie de démonstration.

Compléments : histoire, applications et synthèse

21. Encart historique — une brève histoire de la logique

Boîte à outils — De l'Antiquité à l'informatique

- **Aristote** (IV^e s. av. J.-C.) fonde la logique des *sylogismes* : premières règles de déduction.
- **Leibniz** (XVII^e) rêve d'un *calculus ratiocinator*, un calcul universel du raisonnement.
- **George Boole** (1847) *algèbrise* la logique : le vrai et le faux deviennent 1 et 0, les connecteurs des opérations. C'est l'acte de naissance de l'*algèbre de Boole*.
- **Augustus De Morgan** formalise les lois qui portent son nom.
- **Gottlob Frege** (1879) crée la logique des *prédicats* (quantificateurs $\forall, \exists$) : la logique moderne.
- **Bertrand Russell** (1901) découvre un paradoxe qui ébranle les fondements ; **Hilbert** lance son programme d'axiomatisation.
- **Kurt Gödel** (1931) démontre ses théorèmes d'*incomplétude* : toute théorie assez riche contient des énoncés vrais mais indémontrables.
- **Alan Turing** (1936) relie logique et calcul : la logique devient le socle de l'*informatique*.

22. Applications concrètes

La logique booléenne n'est pas qu'une abstraction : elle *fait fonctionner les ordinateurs*. Les circuits électroniques réalisent physiquement les connecteurs $\wedge$, $\vee$, $\neg$ sous forme de **portes logiques** ; en les combinant, on construit additionneurs, mémoires, processeurs.

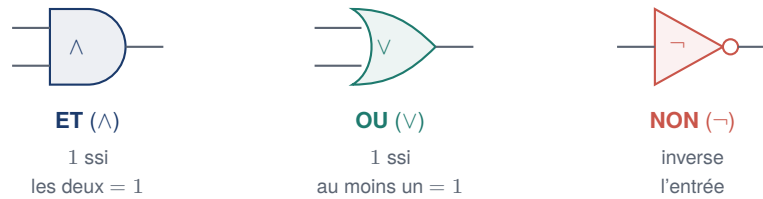


Figure 6 — Les trois portes logiques fondamentales. Toute fonction booléenne s'en déduit.

Remarque — Là où vous rencontrez la logique

- **Informatique** : conditions `if ... and ... or`, tests, preuve de programmes, solveurs SAT.
- **Bases de données** : une recherche « rouge ET taille > 40 » est une conjonction ; les moteurs de recherche combinent $\wedge$, $\vee$, $\neg$.
- **Le problème des chapeaux** vu plus haut n'est autre qu'un **code correcteur** par bit de parité (le « ou exclusif »), utilisé pour fiabiliser les transmissions.
- **Mathématiques** : chaque démonstration du programme (analyse, arithmétique, complexes) applique les raisonnements de ce chapitre.

23. Carte mentale du chapitre

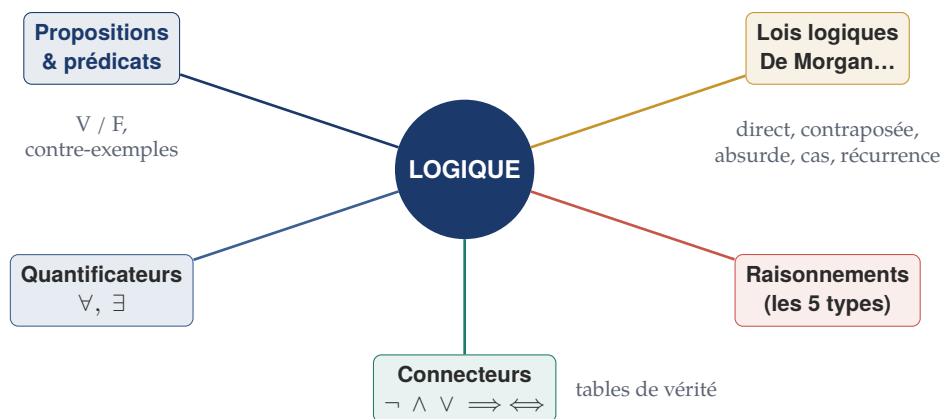


Figure 7 — Vue d'ensemble : les cinq piliers du chapitre.

24. Glossaire des termes et notations

Notation / terme	Signification
Proposition	Énoncé vrai (V) ou faux (F).
$P(x)$	Fonction propositionnelle : proposition dépendant de x .
$\forall x \in E$	«pour tout x de E » (quantificateur universel).
$\exists x \in E$	«il existe au moins un x de E » (quantificateur existentiel).
$\overline{P}, \neg P$	Négation de P .
$P \wedge Q$	Conjonction (« P et Q »).
$P \vee Q$	Disjonction inclusive (« P ou Q »).
$P \Rightarrow Q$	Implication («si P alors Q »).
$P \Leftrightarrow Q$	Équivalence (« P si et seulement si Q »).
$\equiv$	Propositions ayant la même valeur de vérité (équivalentes).
Contraposée	$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$, équivalente à $P \Rightarrow Q$.
Réciproque	$Q \Rightarrow P$ (en général non équivalente à $P \Rightarrow Q$).
Tautologie	Proposition vraie quelles que soient les valeurs de vérité.

25. Auto-évaluation : « Je sais / Je ne sais pas encore »

Objectif	Acquis	À revoir
Reconnaître une proposition et donner sa valeur de vérité	☐	☐
Manier $\forall$, $\exists$ et l'effet de leur ordre	☐	☐
Nier une proposition quantifiée ou composée (De Morgan)	☐	☐
Construire et lire les tables de vérité des connecteurs	☐	☐
Démontrer et utiliser les lois logiques	☐	☐
Choisir et rédiger le bon type de raisonnement	☐	☐
Mener une récurrence complète (initialisation + hérédité)	☐	☐

26. Pour aller plus loin (perspective CPGE)

Remarque

En classes préparatoires, la logique de ce chapitre se prolonge par : le raisonnement par **analyse-synthèse** (existence et unicité), la **récurrence forte** et la **récurrence double**, le principe de **descente infinie** de Fermat, et l'usage systématique des quantificateurs dans les définitions d'**analyse** (ε - δ : limites, continuité, convergence). On y découvre aussi l'**algèbre de Boole** (structure des parties d'un ensemble, dualité $\wedge/\vee$) et, en informatique, la logique propositionnelle comme socle des **preuves de programmes**. Une belle lecture : les théorèmes d'incomplétude de Gödel, qui montrent les limites mêmes de la démonstration.

