MathsElites

EXCELLENCE EN MATHÉMATIQUES

Chapitre complet

Généralités sur les fonctions

1ère Bac SM

Prof : R. Abed

1. Pourquoi ce chapitre ?

Une fonction numérique traduit une dépendance : l'aire d'un carré selon son côté, la position d'un mobile selon le temps, la tension aux bornes d'un condensateur selon la durée de charge. La notion moderne, définie par une *correspondance* qui associe à chaque élément d'un ensemble au plus un élément d'un autre, s'est dégagée au XVIII$^{\text{e}}$ siècle avec Euler (notation $f(x)$, 1734), puis a été affinée par Dirichlet en 1837 : une fonction n'a besoin ni de formule ni de régularité.

Ce chapitre fixe le vocabulaire et les outils communs à toute étude de fonction : domaine, parité, symétries, bornes et extremums, monotonie, périodicité, composition. Il prépare directement les chapitres *Limites*, *Dérivation* et *Étude et représentation graphique des fonctions* de l'année, puis la continuité et les fonctions réciproques de la Terminale SM. Les raisonnements s'appuient uniquement sur les **taux d'accroissement** et l'algèbre : aucune dérivée n'est utilisée avant le chapitre qui l'introduit.

Boîte à outils — Objectifs du chapitre

À la fin de ce chapitre, l'élève saura :

- ☞ déterminer le domaine de définition d'une fonction et comparer deux fonctions ;
- ☞ établir la parité d'une fonction, ou l'existence d'un axe ou d'un centre de symétrie, en vérifiant d'abord le domaine ;
- ☞ majorer, minorer, déterminer un extremum et distinguer *majorant* et *maximum* ;
- ☞ étudier la monotonie par le taux d'accroissement et par composition ;
- ☞ reconnaître et calculer une période ;
- ☞ connaître les variations et les courbes de $x \mapsto ax^2+bx+c$, ax^3, $\sqrt{x+a}$, $\frac{ax+b}{cx+d}$ et construire les courbes de $|f|$, $f(|x|)$, $f(x+a)+b$.

Rappel de cours

Acquis du Tronc commun mobilisés : calcul algébrique et factorisation, équations et inéquations (dont second degré et tableaux de signes), valeur absolue, partie entière, racine carrée ($\sqrt{x^2}=|x|$), repérage dans le plan, fonctions de référence $x \mapsto x^2$, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, trigonométrie de base. Pour les périodes de sin, cos, tan : valeurs remarquables et formules $\cos(x+2\pi)=\cos x$, $\tan(x+\pi)=\tan x$.

Table des matières

Chapitre complet — Généralités sur les fonctions 1
Pourquoi ce chapitre ? 2
1. Fonctions numériques et domaine de définition 2
Notion de fonction numérique 2
Déterminer un domaine de définition 3
Opérations sur les fonctions 4
2. Parité et éléments de symétrie 4
Fonctions paires, fonctions impaires 4
Axe de symétrie, centre de symétrie 6
3. Fonctions bornées et extremums 7
Majorant, minorant, fonction bornée 7
Extremums 7

© 2026 — Tous droits réservés

4. Monotonie . . . 9
Fonctions croissantes, décroissantes . . . 9
Taux d'accroissement . . . 10
Parité et monotonie . . . 11
Opérations sur les fonctions monotones . . . 11
5. Fonctions périodiques . . . 13
Période d'une fonction . . . 13
Intérêt de la périodicité . . . 15
6. Fonctions de référence et transformations de courbes . . . 16
La fonction trinôme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ . . . 16
La fonction $x \mapsto ax^3$ . . . 16
La fonction $x \mapsto \sqrt{x + a}$ . . . 16
La fonction homographique $x \mapsto \dfrac{ax + b}{cx + d}$ . . . 17
Transformations de courbes . . . 18
7. Vers l'étude complète d'une fonction . . . 19
Plan d'étude . . . 19
Tangentes . . . 19
Asymptotes et branches infinies . . . 19
Convexité . . . 20
Compléments . . . 21
Éclairage historique . . . 21
Applications . . . 21
Carte mentale . . . 21
Glossaire des notations . . . 21
Auto-évaluation . . . 22
Pour aller plus loin (CPGE) . . . 22
QCM — 21 questions . . . 25
Corrigé du QCM . . . 29
Grille des réponses . . . 29
Barème et diagnostic . . . 34
Notions à revoir selon les erreurs . . . 34
Exercices . . . 35
Problèmes . . . 38
Corrigés des exercices . . . 39
Corrigés des problèmes . . . 41

1. Fonctions numériques et domaine de définition

2. Notion de fonction numérique

Définition — Fonction numérique

Une **fonction numérique** f associe à chaque élément x d'une partie D de $\mathbb{R}$ **un seul** réel, noté $f(x)$ et appelé **image** de x par f :

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto f(x).$$

© 2026 — Tous droits réservés

L'ensemble des réels qui possèdent une image s'appelle le **domaine de définition** de f, noté $\mathcal{D}_f$:

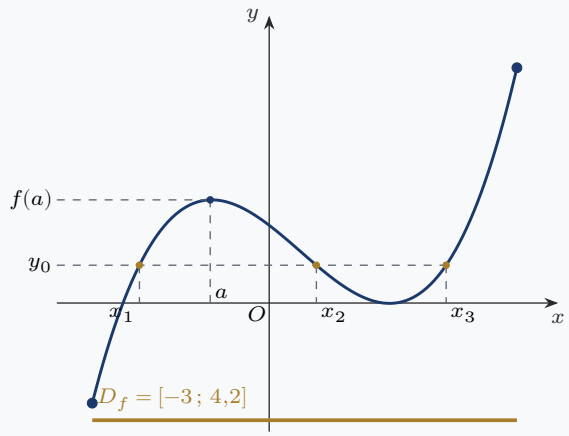
$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Si $f(a) = b$, le réel a est un **antécédent** de b. Dans un repère, la **courbe représentative** de f est $\mathcal{C}_f = \{M(x\,;f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f\}$; l'équation $y = f(x)$ en est une équation.

Remarque

Un réel x n'a *jamais* deux images, mais un réel y peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents. Graphiquement : toute droite verticale coupe $\mathcal{C}_f$ en **au plus** un point ; une droite horizontale peut la couper en plusieurs points (figure ci-dessous).

❑ **Lecture graphique : image et antécédents**



$f(a)$ est l'image de a ; le réel y_0 possède ici trois antécédents x_1, x_2, x_3 ; le domaine est lu sur l'axe des abscisses.

Définition — Égalité de deux fonctions

Deux fonctions f et g sont **égales** si $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g$ et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.

Piège à éviter

$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ et $g(x) = x+1$ coïncident sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ mais ne sont **pas égales** : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ alors que $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$. Les courbes diffèrent d'un point (le point d'abscisse 1 est absent de $\mathcal{C}_f$).

3. Déterminer un domaine de définition

Méthode — Domaine d'une expression

Expression	Condition d'existence
$\dfrac{1}{u(x)}$	$u(x) \neq 0$
$\sqrt{u(x)}$	$u(x) \geqslant 0$
$\dfrac{1}{\sqrt{u(x)}}$	$u(x) > 0$
$\tan u(x)$	$u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$g(f(x))$	$x \in \mathcal{D}_f$ **et** $f(x) \in \mathcal{D}_g$

© 2026 — Tous droits réservés

On résout *toutes* les conditions **avant** de simplifier, puis on **intersecte** les ensembles obtenus.

Exemple — Trois domaines

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$: $x^2-1\neq 0 \iff x\notin\{-1,1\}$, donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ (et non $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, bien que $f(x)=\frac{1}{x-1}$ après simplification).

b) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$: il faut $x\neq -1$ et $\frac{x-1}{x+1}\geqslant 0$. Le tableau de signes donne $x<-1$ ou $x\geqslant 1$: $\mathcal{D}_f=]-\infty,-1[\cup[1,+\infty[$.

c) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}}$: $1+\sin x\geqslant 0$ toujours ; $1+\cos x\geqslant 0$ toujours, et il faut $1+\cos x\neq 0$, c'est-à-dire $x\neq \pi+2k\pi$. Alors le quotient est $\geqslant 0$ et $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{\pi+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$.

4. Opérations sur les fonctions

Propriété — Domaine d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée

$$\mathcal{D}_{f+g}=\mathcal{D}_{fg}=\mathcal{D}_f\cap\mathcal{D}_g,\qquad \mathcal{D}_{f/g}=\{x\in\mathcal{D}_f\cap\mathcal{D}_g\mid g(x)\neq 0\},$$
$$\mathcal{D}_{g\circ f}=\{x\in\mathcal{D}_f\mid f(x)\in\mathcal{D}_g\}.$$

Définition — Comparaison de deux fonctions

Sur un intervalle $I\subset\mathcal{D}_f\cap\mathcal{D}_g$, on écrit $f\leqslant g$ si $f(x)\leqslant g(x)$ pour tout $x\in I$. La **position relative** de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se déduit du signe de $f(x)-g(x)$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ lorsque $f(x)-g(x)\geqslant 0$, et les abscisses des points communs sont les solutions de $f(x)=g(x)$.

2. Parité et éléments de symétrie

5. Fonctions paires, fonctions impaires

Définition — Parité

Soit f une fonction de domaine $\mathcal{D}_f$.

☞ f est **paire** si : (1) $\forall x\in\mathcal{D}_f,\ -x\in\mathcal{D}_f$; (2) $\forall x\in\mathcal{D}_f,\ f(-x)=f(x)$.

☞ f est **impaire** si : (1) $\forall x\in\mathcal{D}_f,\ -x\in\mathcal{D}_f$; (2) $\forall x\in\mathcal{D}_f,\ f(-x)=-f(x)$.

La condition (1) signifie que $\mathcal{D}_f$ est **symétrique par rapport à** 0 : elle se vérifie *en premier*.

Exemple

$x\mapsto x^n$ est paire si n est pair, impaire si n est impair (pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(-x)^n=(-1)^n x^n$). Les fonctions $|x|$ et cos sont paires ; sin, tan et $x\mapsto\frac{1}{x}$ sont impaires.

Propriété — Interprétation géométrique

Le plan étant muni d'un repère orthogonal :

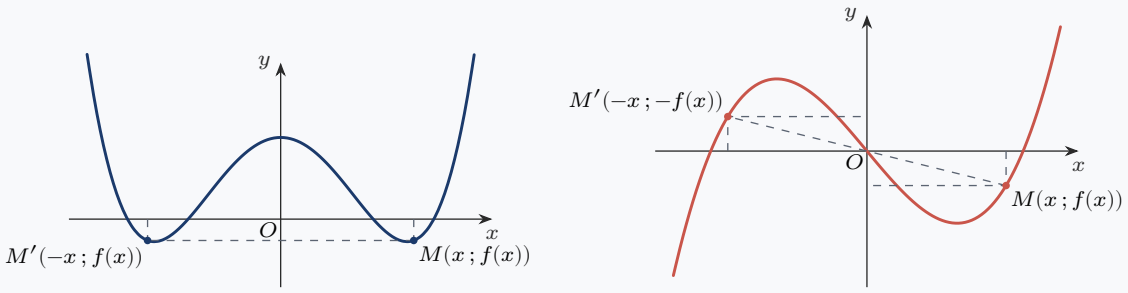
☞ f est paire $\iff$ $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;

☞ f est impaire $\iff$ $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine O.

© 2026 — Tous droits réservés

Démonstration. Soit $M(x\,;f(x))\in\mathcal{C}_f$. Le symétrique de M par rapport à (Oy) est $M'(-x\,;f(x))$; son symétrique par rapport à O est $M''(-x\,;-f(x))$. Si f est paire, $f(-x)=f(x)$ donc $M'\in\mathcal{C}_f$; si f est impaire, $f(-x)=-f(x)$ donc $M''\in\mathcal{C}_f$. Réciproquement, si $\mathcal{C}_f$ est stable par ces symétries, $M'(-x\,;f(x))\in\mathcal{C}_f$ impose $-x\in\mathcal{D}_f$ et $f(-x)=f(x)$ (une seule image), et de même dans le cas impair. ■

❑ **Fonction paire et fonction impaire**



À gauche : $\mathcal{C}_f$ paire, symétrique par rapport à (Oy). À droite : $\mathcal{C}_f$ impaire, symétrique par rapport à O.

Piège à éviter — Le domaine d'abord

$f(x)=x^2$ sur $[-1,2]$ **n'est pas paire** : $2\in\mathcal{D}_f$ mais $-2\notin\mathcal{D}_f$. De même $x\mapsto\sqrt{x}$ n'est ni paire ni impaire. La condition $f(-x)=f(x)$ n'a de sens qu'après avoir établi la symétrie de $\mathcal{D}_f$.

Propriété — Fonction à la fois paire et impaire

Une fonction paire et impaire est la fonction nulle sur son domaine ; inversement, la fonction nulle sur un domaine symétrique par rapport à 0 est paire et impaire.

Démonstration. Pour tout $x\in\mathcal{D}_f$: $f(x)=f(-x)=-f(x)$, donc $f(x)=0$. ■

Propriété — Parité et opérations

Soit f et g deux fonctions définies sur un même domaine symétrique par rapport à 0 (pour $g\circ f$: $\mathcal{D}_f$ symétrique et $f(\mathcal{D}_f)\subset\mathcal{D}_g$).

f	g	$f+g$	$f\times g$
paire	paire	paire	paire
impaire	impaire	impaire	**paire**
paire	impaire	*en général ni l'une ni l'autre*	impaire

De plus, si f est paire, $g\circ f$ est paire ; si f et g sont impaires, $g\circ f$ est impaire.

Démonstration. Pour x du domaine : si f impaire et g impaire, $(fg)(-x)=(-f(x))(-g(x))=(fg)(x)$; si f paire et g impaire, $(fg)(-x)=f(x)(-g(x))=-(fg)(x)$. Pour la composée : $g(f(-x))=g(f(x))$ si f est paire ; $g(f(-x))=g(-f(x))=-g(f(x))$ si f et g sont impaires. Le cas «ni l'une ni l'autre» : $x\mapsto x^2+x$ ($f=x^2$ paire, $g=x$ impaire) vérifie $h(1)=2$, $h(-1)=0$. ■

Méthode — Étudier la parité

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ et vérifier que $x\in\mathcal{D}_f\Rightarrow -x\in\mathcal{D}_f$. Sinon : ni paire ni impaire.
2. Calculer $f(-x)$ et le comparer à $f(x)$ puis à $-f(x)$.
3. Conclure ; pour exclure la parité ou l'imparité, exhiber un **contre-exemple** numérique.

© 2026 — Tous droits réservés

Exemple

$f(x)=\dfrac{x^3}{x^3+x}$: $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^*$, symétrique. Pour $x\neq 0$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ et $f(-x)=f(x)$: f est **paire**.
Pour $f(x)=x^3-x^2+1$, $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$: $f(2)=5$ et $f(-2)=-11$; $f(-2)\neq f(2)$ et $f(-2)\neq -f(2)$, donc f est **ni paire ni impaire**.

6. Axe de symétrie, centre de symétrie

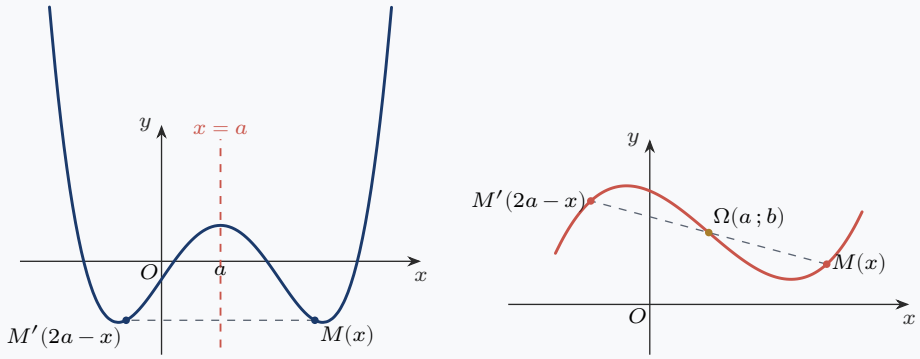
Propriété — Caractérisation

Soit $a,b\in\mathbb{R}$ et f une fonction ; on pose $\varphi(t)=f(a+t)$ (on translate la courbe pour amener a en 0).

- La droite $(\Delta):x=a$ est un **axe de symétrie** de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si : (1) $\forall x\in\mathcal{D}_f,\ 2a-x\in\mathcal{D}_f$; (2) $\forall x\in\mathcal{D}_f,\ f(2a-x)=f(x)$. Ceci équivaut à : φ est paire.
- Le point $\Omega(a\,;b)$ est un **centre de symétrie** de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si : (1) $\forall x\in\mathcal{D}_f,\ 2a-x\in\mathcal{D}_f$; (2) $\forall x\in\mathcal{D}_f,\ f(2a-x)+f(x)=2b$. Ceci équivaut à : $t\mapsto f(a+t)-b$ est impaire.

Démonstration. Le symétrique de $M(x\,;y)$ par rapport à $x=a$ est $M'(2a-x\,;y)$, et par rapport à Ω le point $M''(2a-x\,;2b-y)$. Comme pour la parité, dire que $\mathcal{C}_f$ est stable par ces symétries revient aux conditions (1) et (2). En posant $x=a+t$: (2) s'écrit $f(a-t)=f(a+t)$, soit $\varphi(-t)=\varphi(t)$, et dans le cas du centre $f(a-t)-b=-(f(a+t)-b)$. ■

❑ Axe de symétrie et centre de symétrie



Gauche : la droite $x=a$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$. Droite : $\Omega(a\,;b)$ est un centre de symétrie, milieu de tout segment $[MM']$.

Exemple — Deux vérifications

a) $f(x)=\sqrt{-x^2+2x}$, $\mathcal{D}_f=[0,2]$. Pour $x\in[0,2]$: $2-x\in[0,2]$ et $f(2-x)=\sqrt{-(2-x)^2+2(2-x)}=\sqrt{-x^2+2x}=f(x)$. La droite $x=1$ est un **axe de symétrie**.

b) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$, $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{3\}$. Pour $x\neq 3$: $6-x\neq 3$ et $f(6-x)+f(x)=\dfrac{13-2x}{3-x}+\dfrac{2x+1}{x-3}=\dfrac{4x-12}{x-3}=4$. Le point $\Omega(3\,;2)$ est un **centre de symétrie**.

Attention — Parité $\neq$ symétrie quelconque

La parité est le cas particulier $a=0$ (axe) ou $\Omega=O$ (centre). Une fonction peut avoir un axe $x=a$ sans être paire, et un centre $\Omega(a\,;b)$ avec $b\neq 0$ sans être impaire.

© 2026 — Tous droits réservés

3. Fonctions bornées et extremums

7. Majorant, minorant, fonction bornée

Définition — Fonction majorée, minorée, bornée

Soit I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$ et m, M deux réels.

- f est **majorée** par M sur I si $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant M$; M est un **majorant** de f.
- f est **minorée** par m sur I si $\forall x \in I,\ m \leqslant f(x)$; m est un **minorant** de f.
- f est **bornée** sur I si elle est à la fois majorée et minorée : $\exists\, m, M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Propriété — Caractérisation par la valeur absolue

f est bornée sur I si et seulement si $\exists K \geqslant 0,\ \forall x \in I,\ |f(x)| \leqslant K$.

Démonstration. Si $m \leqslant f \leqslant M$, alors $|f(x)| \leqslant K$ avec $K = \max(|m|, |M|)$. Réciproquement $|f(x)| \leqslant K$ équivaut à $-K \leqslant f(x) \leqslant K$. ■

Méthode — Majorer ou minorer

Pour prouver $f \leqslant M$, étudier le **signe de** $M - f(x)$: mise au même dénominateur, factorisation, forme canonique ou identité remarquable.

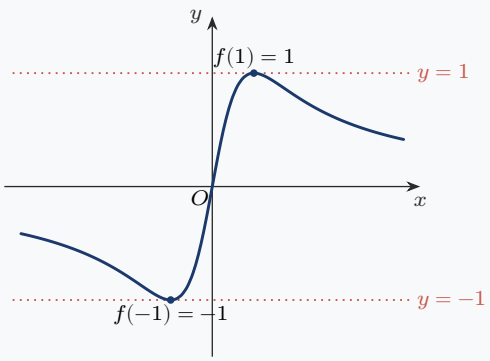
Exemple — Une fonction rationnelle bornée

Soit $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$1 - f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \geqslant 0, \qquad 1 + f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \geqslant 0,$$

donc $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$: f est bornée. De plus $f(1) = 1$ et $f(-1) = -1$: ces bornes sont **atteintes**.

❑ Fonction bornée dont les bornes sont atteintes



$f(x) = \frac{2x}{x^2+1} : -1 \leqslant f \leqslant 1$ *avec égalité en* $x = -1$ *et* $x = 1$.

8. Extremums

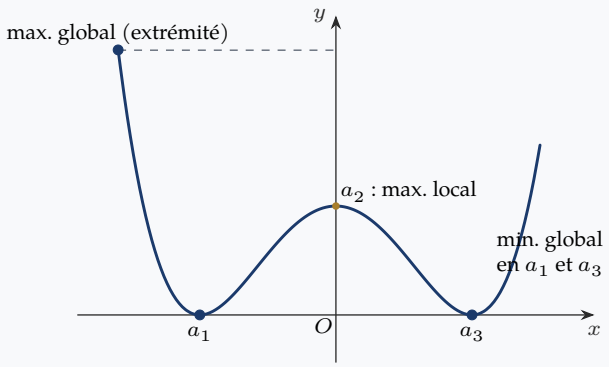
© 2026 — Tous droits réservés

Définition — Maximum, minimum, extremum

Soit f définie sur I et $a \in I$.

- f admet en a un **maximum** (global) sur I si $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant f(a)$; un **minimum** (global) si $\forall x \in I,\ f(a) \leqslant f(x)$.
- f admet en a un **maximum local** (resp. **minimum local**) s'il existe un intervalle ouvert J tel que $a \in J \subset I$ et $\forall x \in J,\ f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(a) \leqslant f(x)$).
- Un **extremum** est un maximum ou un minimum. Le réel $f(a)$ est la **valeur maximale** (resp. minimale).

❑ **Extremums globaux et locaux**



Sur $[-3{,}2\,;3]$: minimum global 0 atteint en deux points, maximum local en $a_2 = 0$; le maximum global est atteint à l'extrémité gauche.

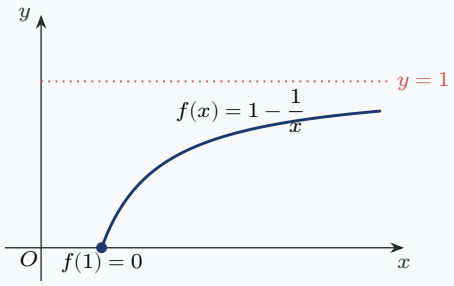
Attention — Majorant $\neq$ maximum

$f(a)$ est un maximum *si et seulement si* c'est un majorant **atteint**. Un majorant n'est en général pas une valeur de f.

Exemple — Majorée sans maximum

$f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ sur $[1, +\infty[$. Pour $x \geqslant 1$: $0 \leqslant f(x) < 1$; f est majorée par 1 et minorée par 0, atteint son minimum 0 en 1. Mais f **n'a pas de maximum** : si $f(a)$ en était un, $a + 1 \geqslant 1$ et $f(a+1) - f(a) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} > 0$, contradiction.

❑ **Un majorant atteint ou non**



1 majore f sans être une valeur de f : aucun maximum.

Propriété — Extremum d'un trinôme

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\Delta = b^2 - 4ac$. Sur $\mathbb{R}$: si $a > 0$, f admet un minimum $f(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a}$, atteint en α *seulement*, et n'est pas majorée ; si $a < 0$, f admet un

© 2026 — Tous droits réservés

maximum $f(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a}$ et n'est pas minorée.

Démonstration. Forme canonique : $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a(x-\alpha)^2 + f(\alpha)$. Si $a > 0$, $a(x-\alpha)^2 \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $x = \alpha$, d'où $f(x) \geqslant f(\alpha)$. Pour tout réel M, le réel $x = \alpha + \sqrt{\frac{|M|+|f(\alpha)|+1}{a}}$ vérifie $f(x) = |M| + |f(\alpha)| + 1 + f(\alpha) > M$: f n'est pas majorée. Le cas $a < 0$ s'obtient avec $-f$. ■

4. Monotonie

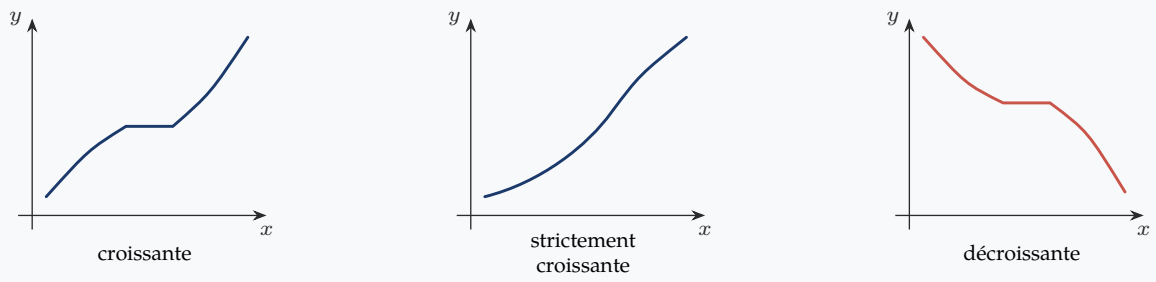
9. Fonctions croissantes, décroissantes

Définition — Sens de variation

Soit I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$.

- f est **croissante** sur I si $\forall x, y \in I,\ x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$; **strictement croissante** si $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- f est **décroissante** sur I si $\forall x, y \in I,\ x < y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$; **strictement décroissante** si $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
- f est **(strictement) monotone** sur I si elle est (strictement) croissante sur I ou (strictement) décroissante sur I.

❑ Croissance, stricte croissance, décroissance



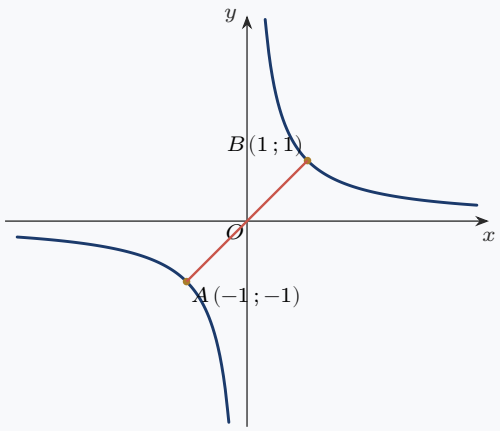
Une fonction croissante peut comporter un palier ; la stricte monotonie l'interdit. Une fonction constante est à la fois croissante et décroissante.

Piège à éviter — Monotonie sur un intervalle, jamais sur une réunion

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, **mais pas sur** $\mathbb{R}^*$: $-1 < 1$ et pourtant $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$. La monotonie se définit sur un **intervalle**.

© 2026 — Tous droits réservés

❑ $x \mapsto 1/x$ n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$



Le segment $[AB]$ montre $A < B$ en abscisse et $f(A) < f(B)$ en ordonnée.

10. Taux d'accroissement

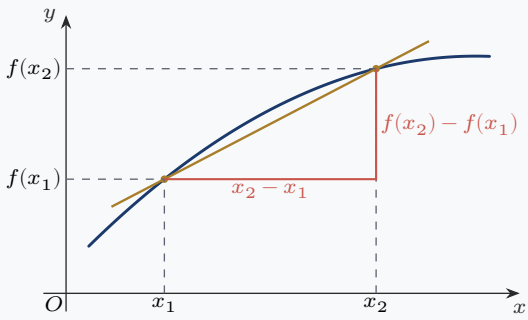
Définition — Taux d'accroissement

Pour $x_1 \neq x_2$ dans $\mathcal{D}_f$:

$$T_f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

C'est le **coefficient directeur** de la sécante à $\mathcal{C}_f$ passant par les points d'abscisses x_1 et x_2 ; il est symétrique : $T_f(x_1, x_2) = T_f(x_2, x_1)$.

❑ Taux d'accroissement et sécante



$T_f(x_1, x_2) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ *est la pente de la sécante.*

Propriété — Taux d'accroissement et monotonie

Soit I un intervalle. f est croissante (resp. strictement croissante, décroissante, strictement décroissante) sur I si et seulement si pour tous $x_1 \neq x_2$ de I : $T_f(x_1, x_2) \geqslant 0$ (resp. > 0, $\leqslant 0$, < 0).

Démonstration. Cas « croissante ». Si f est croissante et $x_1 < x_2$: $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$ et $x_2 - x_1 > 0$, donc $T_f(x_1, x_2) \geqslant 0$; le cas $x_1 > x_2$ s'en déduit par symétrie du taux. Réciproquement, pour $x_1 < x_2$: $f(x_2) - f(x_1) = T_f(x_1, x_2)\,(x_2 - x_1) \geqslant 0$. Les trois autres cas sont identiques. ■

Méthode — Monotonie par le taux d'accroissement

1. Écrire $f(x_1) - f(x_2)$ avec $x_1 \neq x_2$ dans l'intervalle I étudié.
2. **Factoriser par** $x_1 - x_2$ et simplifier : on obtient $T_f(x_1, x_2)$ sous forme d'un produit ou d'un

© 2026 — Tous droits réservés

quotient dont le signe se lit.

3. Étudier le signe de $T_f(x_1, x_2)$ *pour tous* $x_1 \neq x_2$ de I, puis conclure.

Exemple — Deux études complètes

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Pour $x_1 \neq x_2$: $T_f(x_1, x_2) = \dfrac{(x_2^2 - x_1^2) - 3(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = x_1 + x_2 - 3$. Sur $[\frac{3}{2}, +\infty[$: $x_1, x_2 \geqslant \frac{3}{2}$ et $x_1 \neq x_2$ imposent $x_1 + x_2 > 3$, donc $T_f(x_1, x_2) > 0$: f est strictement croissante. Sur $]-\infty, \frac{3}{2}]$: $x_1 + x_2 < 3$, f est strictement décroissante.

b) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$ sur $]-1, +\infty[$. $T_f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} > 0$ car $x_1+1 > 0$ et $x_2+1 > 0$: f est strictement croissante sur $]-1, +\infty[$, et de même sur $]-\infty, -1[$ (produit de deux nombres négatifs).

11. Parité et monotonie

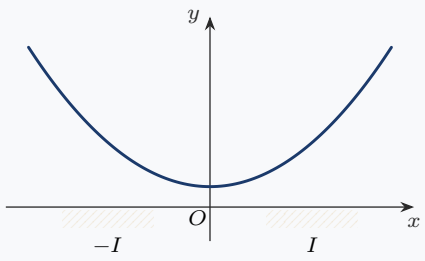
Propriété — Parité et monotonie

Soit f de domaine symétrique par rapport à 0 et I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}^+$; on note $-I = \{-x \ ; \ x \in I\}$.

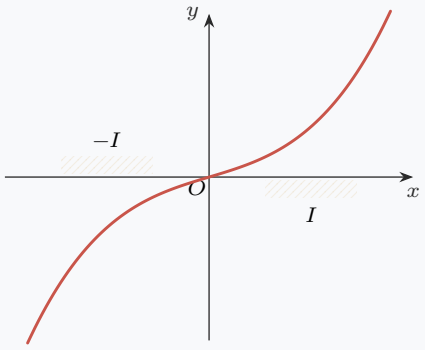
- ☞ Si f est **paire** : f et $f_{|-I}$ ont des sens de variation **contraires** (croissante sur $I \Rightarrow$ décroissante sur $-I$, et réciproquement).
- ☞ Si f est **impaire** : f a le **même** sens de variation sur I et sur $-I$.

Démonstration. Soit f paire et croissante sur I, et $x < y$ dans $-I$. Alors $-y < -x$ dans I, donc $f(-y) \leqslant f(-x)$, c'est-à-dire $f(y) \leqslant f(x)$: f est décroissante sur $-I$. Si f est impaire : $f(-y) \leqslant f(-x)$ s'écrit $-f(y) \leqslant -f(x)$, soit $f(x) \leqslant f(y)$: f est croissante sur $-I$. Les autres cas sont analogues. ■

❑ Parité et monotonie



f paire



f impaire

f paire : sens de variation contraire sur I et $-I$. f impaire : même sens de variation.

12. Opérations sur les fonctions monotones

Théorème — Somme, multiple, opposé, inverse

Soit f, g définies sur un intervalle I et k un réel.

1) Si $k > 0$, kf a le même sens de variation que f ; si $k < 0$, le sens contraire.

© 2026 — Tous droits réservés

2) Si f et g sont strictement croissantes (resp. décroissantes) sur I, $f+g$ l'est aussi.

3) Si f est strictement monotone sur I et de **signe strict constant** sur I (donc sans zéro), alors $\frac{1}{f}$ a le sens de variation **contraire** de celui de f.

Démonstration. (2) $x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$ et $g(x)<g(y)$; l'addition donne $f(x)+g(x)<f(y)+g(y)$. (1) se démontre en multipliant l'inégalité $f(x)<f(y)$ par k. (3) Si f est strictement croissante et strictement positive sur I (resp. strictement négative), $0<f(x)<f(y)$ donne $\frac{1}{f(y)}<\frac{1}{f(x)}$ (resp. $f(x)<f(y)<0$ donne de même $\frac{1}{f(y)}<\frac{1}{f(x)}$). ■

Remarque

Si f et g n'ont pas le même sens de variation, **on ne peut rien conclure** pour $f+g$: avec $f(x)=2x$ strictement croissante et $g(x)=-x$ strictement décroissante, $f+g=x$ croît ; avec $g(x)=-3x$, $f+g=-x$ décroît ; avec $g(x)=-2x$, $f+g=0$ est constante. Le produit appelle les mêmes précautions : $x\mapsto x$ est strictement croissante, mais $x\mapsto x\cdot x=x^2$ ne l'est pas sur $\mathbb{R}$.

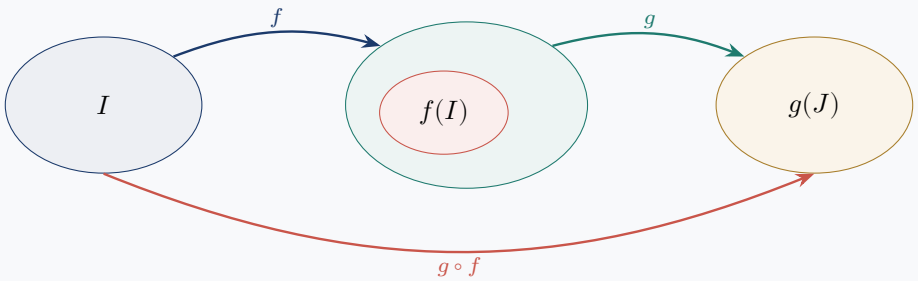
Théorème — Composée et monotonie

Soit f définie sur un intervalle I et g définie sur un intervalle J avec $f(I)\subset J$ (c'est-à-dire $\forall x\in I,\ f(x)\in J$). Alors $g\circ f$ est définie sur I, et :

f sur I	g sur J	$g\circ f$ sur I
str. croissante	str. croissante	str. **croissante**
str. croissante	str. décroissante	str. **décroissante**
str. décroissante	str. croissante	str. **décroissante**
str. décroissante	str. décroissante	str. **croissante**

Démonstration. Soit $x<y$ dans I. Si f est strictement croissante, $f(x)<f(y)$ avec $f(x),f(y)\in J$ (hypothèse $f(I)\subset J$) ; si g est strictement décroissante sur J : $g(f(x))>g(f(y))$, d'où le cas 2 ; si g est strictement croissante : $g(f(x))<g(f(y))$, d'où le cas 1. Si f est strictement décroissante, $f(x)>f(y)$ et g inverse ou conserve l'inégalité ; les cas 3 et 4 s'en déduisent. ■

❑ **Schéma de la composition**



La condition $f(I)\subset J$ garantit que g est appliquée à des éléments où elle est étudiée.

Méthode — Étudier une composée

(1) Écrire $h=g\circ f$; (2) **déterminer** $f(I)$ (ou au moins un intervalle $J\supset f(I)$ sur lequel g est monotone) ; (3) donner les variations de f sur I et de g sur J ; (4) appliquer le tableau.

© 2026 — Tous droits réservés

Exemple — Deux compositions

a) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$. Sur $I=[0,+\infty[$, $v:x\mapsto x^2+1$ est strictement croissante (taux $x_1+x_2>0$) à valeurs dans $J=[1,+\infty[$, et $u:t\mapsto\sqrt{t}$ est strictement croissante sur J : $f=u\circ v$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Comme f est paire, elle est strictement décroissante sur $]-\infty,0]$ (propriété précédente).

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$: $v(x)=x^2+1$, $u(t)=\frac{1}{t}$ strictement décroissante sur $]0,+\infty[$; f est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ et strictement croissante sur $]-\infty,0]$.

Astuce — La fonction $x\mapsto f(|x|)$

$g(x)=f(|x|)$ est **paire** ; sur $[0,+\infty[$ elle coïncide avec f et sur $]-\infty,0]$ sa courbe est la symétrique de celle de $f_{|[0,+\infty[}$ par rapport à (Oy) : ses variations sur $]-\infty,0]$ sont *contraires* de celles sur $[0,+\infty[$.

5. Fonctions périodiques

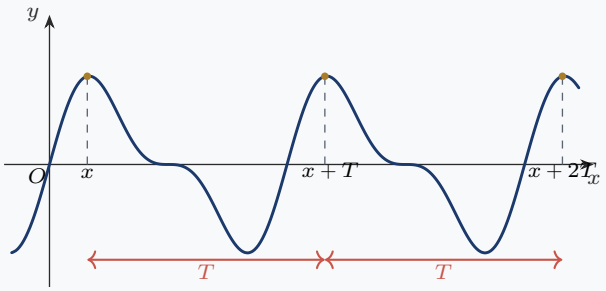
13. Période d'une fonction

Définition — Fonction périodique

Soit $T>0$. La fonction f est **périodique de période** T (ou T-périodique) si :

- ☞ $\forall x\in\mathcal{D}_f,\ x+T\in\mathcal{D}_f$ et $x-T\in\mathcal{D}_f$;
- ☞ $\forall x\in\mathcal{D}_f,\ f(x+T)=f(x)$.

❑ Une fonction périodique



Les points d'abscisses x, $x+T$, $x+2T$ ont la même ordonnée : la courbe se reproduit par translation de vecteur $T\vec{i}$.

Remarque

Si f est T-périodique, alors $f(x+kT)=f(x)$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$ et tout $x\in\mathcal{D}_f$ (récurrence sur $|k|$) : tout multiple entier strictement positif de T est une période. Lorsqu'on dit « f est T-périodique », T désigne, par convention, la **plus petite période strictement positive**, *si elle existe* (la fonction constante n'en possède pas).

Théorème — Fonctions trigonométriques

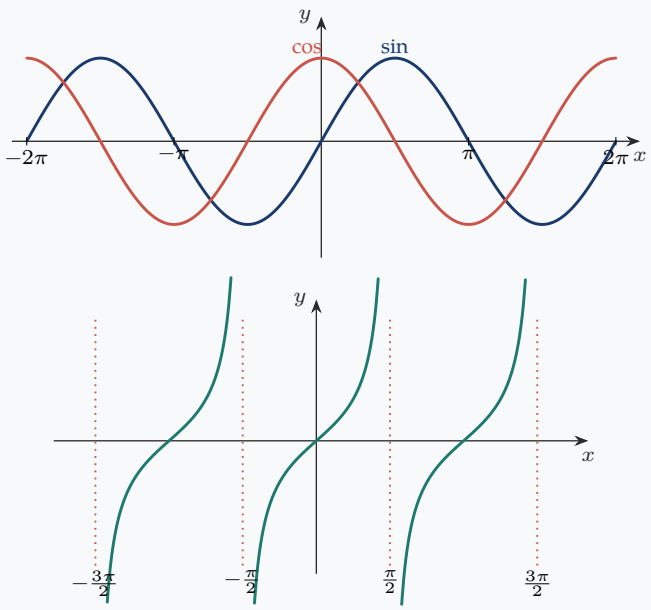
sin et cos sont 2π-périodiques ; tan est π-périodique.

Démonstration. On a $\cos(x+2\pi)=\cos x$ et $\sin(x+2\pi)=\sin x$. Si $T>0$ est une période de cos, alors $\cos T=\cos 0=1$, donc $T\in 2\pi\mathbb{Z}$ et $T\geqslant 2\pi$: 2π est la plus petite période. Pour tan :

© 2026 — Tous droits réservés

$\tan(x+\pi)=\tan x$ et le domaine est stable par $\pm\pi$; si T est une période, $\tan T=\tan 0=0$ impose $T\in\pi\mathbb{Z}$, donc $T\geqslant\pi$. ■

❑ **Graphes de** sin, cos **et** tan



sin *(bleu) et* cos *(rouge) :* 2π*-périodiques ;* tan *:* π*-périodique, définie hors des multiples impairs de* $\frac{\pi}{2}$.

Propriété — Périodes usuelles

Soit $a\neq 0$, $b\in\mathbb{R}$ et f une fonction T-périodique. Alors $x\mapsto f(ax+b)$ est périodique de période $\dfrac{T}{|a|}$. En particulier $\cos(\omega x+\varphi)$ et $\sin(\omega x+\varphi)$ ont pour période $\frac{2\pi}{|\omega|}$ et $\tan(\omega x+\varphi)$ a pour période $\frac{\pi}{|\omega|}$.

Démonstration. Soit $h(x)=f(ax+b)$. $h\left(x+\frac{T}{|a|}\right)=f(ax\pm T+b)=f(ax+b)=h(x)$; le domaine de h est stable par $\pm\frac{T}{|a|}$ puisque celui de f est stable par $\pm T$. ■

Propriété — Somme de deux fonctions périodiques

Si f est T_1-périodique, g est T_2-périodique et $\frac{T_1}{T_2}=\frac{p}{q}$ avec $p,q\in\mathbb{N}^*$, alors $f+g$ (ainsi que fg) est périodique de période $T=qT_1=pT_2$.

Démonstration. $f(x+qT_1)=f(x)$ et $g(x+pT_2)=g(x)$; comme $qT_1=pT_2$, $(f+g)(x+T)=(f+g)(x)$. ■

Exemple — Calculs de périodes

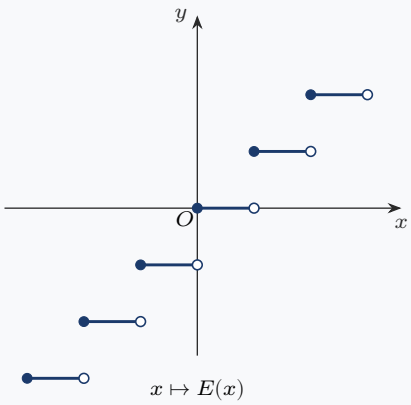
a) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$: période $\frac{2\pi}{2}=\pi$. $\cos\frac{x}{3}$: période 6π. $\tan\frac{x}{4}$: période 4π.

b) $f(x)=\sin(4x+\frac{\pi}{3})+\cos(6x-\frac{\pi}{4})$: périodes $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{3}$, de rapport $\frac{\pi/2}{\pi/3}=\frac{3}{2}$; $T=2\cdot\frac{\pi}{2}=3\cdot\frac{\pi}{3}=\pi$ est une période de f (c'est la plus petite, résultat vérifié et admis ici).

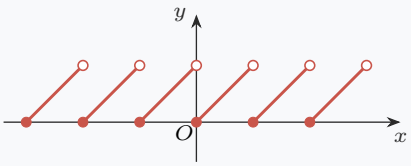
c) $x\mapsto x-E(x)$ est 1-périodique : $E(x)\leqslant x<E(x)+1$ donne $E(x)+1\leqslant x+1<E(x)+2$, donc $E(x+1)=E(x)+1$ et $(x+1)-E(x+1)=x-E(x)$.

© 2026 — Tous droits réservés

❑ **Partie entière et $x \mapsto E(x)$**



$x \mapsto E(x)$



$x \mapsto x - E(x)$ (1-périodique)

E n'est pas périodique ; $x - E(x)$ est la « partie fractionnaire » de x, 1-périodique.

Piège à éviter — Une somme de fonctions périodiques n'est pas toujours périodique

$f(x) = \cos x + \cos(\sqrt{2}\,x)$ **n'est pas périodique**. Si $T > 0$ était une période, $f(T) = f(0) = 2$ forcerait $\cos T = \cos(\sqrt{2}T) = 1$, donc $T = 2k\pi$ et $\sqrt{2}\,T = 2m\pi$ avec $k, m \in \mathbb{N}^*$, d'où $\sqrt{2} = \frac{m}{k} \in \mathbb{Q}$: contradiction. Le rapport des périodes doit être **rationnel**.

14. Intérêt de la périodicité

Astuce — Réduire l'intervalle d'étude

Pour une fonction T-périodique, on étudie f sur un intervalle de longueur T (par exemple $[0, T[$) puis on complète la courbe par translations de vecteurs $kT\vec{i}$. Si f est de plus **paire** (ou impaire), l'étude se réduit à $[0, \frac{T}{2}]$: la courbe se complète par symétrie puis par translation.

© 2026 — Tous droits réservés

6. Fonctions de référence et transformations de courbes

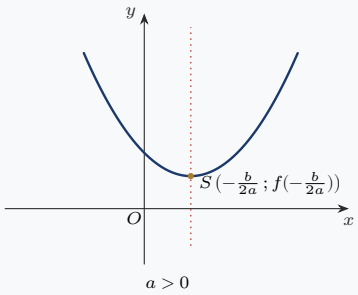
15. La fonction trinôme $x \mapsto ax^2 + bx + c$

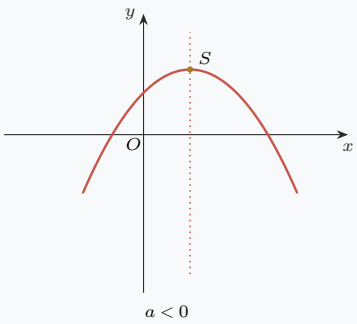
Théorème — Variations d'un trinôme

Soit $a \neq 0$, $f(x) = ax^2+bx+c$ et $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$. Si $a > 0$, f est strictement décroissante sur $]-\infty, \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$; si $a < 0$, c'est l'inverse. La courbe est une **parabole** d'**axe de symétrie** $x = \alpha$ et de **sommet** $S(\alpha\,;f(\alpha))$.

Démonstration. $T_f(x_1, x_2) = a(x_1 + x_2) + b = a\,(x_1 + x_2 - 2\alpha)$. Si $a > 0$ et $x_1, x_2 \geqslant \alpha$, $x_1 \neq x_2$: $x_1 + x_2 > 2\alpha$ donc $T_f(x_1, x_2) > 0$; si $x_1, x_2 \leqslant \alpha$: $T_f(x_1, x_2) < 0$. Le cas $a < 0$ change le signe. Axe : $f(2\alpha - x) = a(\alpha - x)^2 + f(\alpha) = f(x)$ d'après la forme canonique. ■

❑ Paraboles





Le sommet S est l'extremum de f ; la droite $x = -\frac{b}{2a}$ est l'axe.

16. La fonction $x \mapsto ax^3$

Théorème

Soit $a \neq 0$ et $f(x) = ax^3$. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 0$, strictement décroissante si $a < 0$; f est impaire : O est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Démonstration. $T_f(x_1, x_2) = a\,(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$ et $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + \frac{x_2}{2})^2 + \frac{3}{4}x_2^2 > 0$ dès que $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$. Le signe de $T_f(x_1, x_2)$ est celui de a. ■

17. La fonction $x \mapsto \sqrt{x + a}$

Théorème

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \sqrt{x + a}$, définie sur $[-a, +\infty[$. f est strictement croissante sur $[-a, +\infty[$ et minorée par 0, avec $f(-a) = 0$.

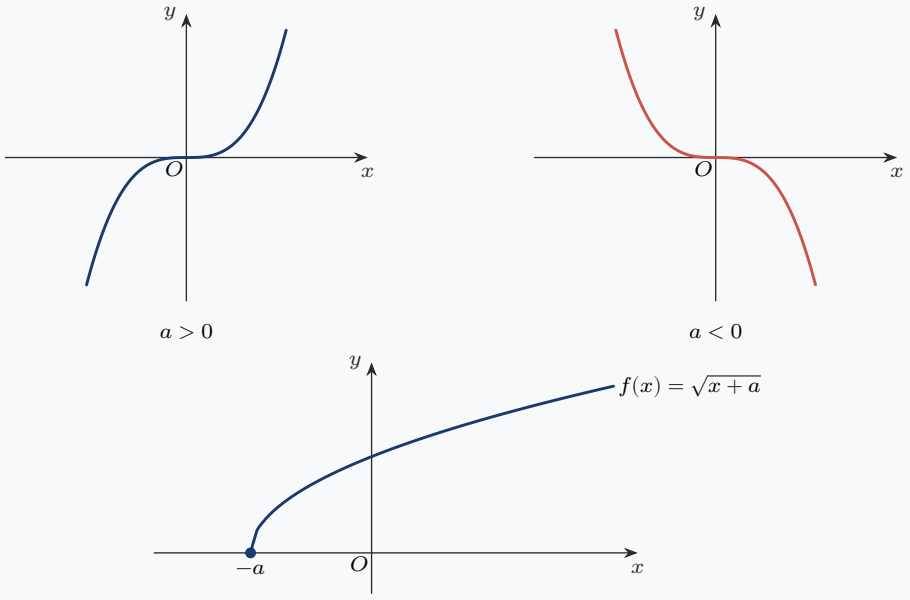
Démonstration. Pour $x_1 \neq x_2$ dans $[-a, +\infty[$, en multipliant par la quantité conjuguée :

$$T_f(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{x_2 + a} - \sqrt{x_1 + a}}{x_2 - x_1} = \frac{1}{\sqrt{x_1 + a} + \sqrt{x_2 + a}} > 0.$$

■

© 2026 — Tous droits réservés

❑ $x \mapsto ax^3$ et $x \mapsto \sqrt{x+a}$



La courbe de $\sqrt{x+a}$ est la translatée de celle de $\sqrt{x}$ par le vecteur $-a\,\vec{\imath}$.

18. La fonction homographique $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$

Définition — Fonction homographique

Soit a, b, c, d réels avec $c \neq 0$ et $D = ad - bc \neq 0$ (si $D = 0$, f est constante sur son domaine). La fonction $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$; sa courbe est une **hyperbole**.

Propriété — Forme réduite

Pour $x \neq -\frac{d}{c}$: $f(x) = \dfrac{a}{c} - \dfrac{D}{c^2} \cdot \dfrac{1}{x + \frac{d}{c}}$.

Démonstration. $\frac{a}{c} - \frac{D}{c(cx+d)} = \frac{a(cx+d)-(ad-bc)}{c(cx+d)} = \frac{acx+bc}{c(cx+d)} = \frac{ax+b}{cx+d}$. ■

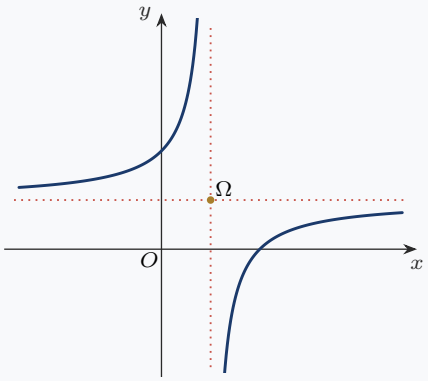
Théorème — Variations et symétrie

- ☞ Si $D > 0$: f est strictement croissante sur $]-\infty, -\frac{d}{c}[$ et sur $]-\frac{d}{c}, +\infty[$.
- ☞ Si $D < 0$: f est strictement décroissante sur chacun de ces deux intervalles.
- ☞ $\Omega\left(-\frac{d}{c}\,;\,\frac{a}{c}\right)$ est un **centre de symétrie** de l'hyperbole ; les droites $x = -\frac{d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$ en sont les **asymptotes**.

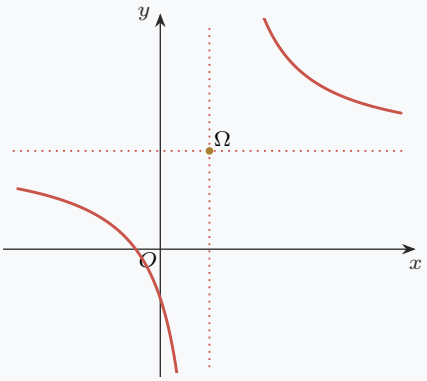
Démonstration. $T_f(x_1, x_2) = \dfrac{ad-bc}{(cx_1+d)(cx_2+d)}$. Sur chaque intervalle, $cx_1 + d$ et $cx_2 + d$ ont le même signe : leur produit est > 0 et $T_f(x_1, x_2)$ a le signe de D. Centre : avec $\alpha = -\frac{d}{c}$ et $t \neq 0$, la forme réduite donne $f(\alpha + t) - \frac{a}{c} = -\frac{D}{c^2 t}$, fonction impaire de t ; d'après la caractérisation des centres de symétrie, $\Omega(\alpha\,;\frac{a}{c})$ est un centre de symétrie. Asymptotes : l'écart $|f(x) - \frac{a}{c}| = \frac{|D|}{c^2|x+\frac{d}{c}|}$ devient arbitrairement petit lorsque $|x|$ grandit, et $|f(x)|$ devient arbitrairement grand lorsque x approche $-\frac{d}{c}$ (justification précise au chapitre *Limites*). ■

© 2026 — Tous droits réservés

❑ Hyperboles



$D > 0$: f str. croissante



$D < 0$: f str. décroissante

Gauche : $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$, $D = 1 > 0$. Droite : $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$, $D = -3 < 0$. Les asymptotes sont en pointillés.

Attention — Pas de monotonie sur le domaine tout entier

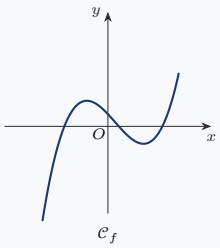
Une fonction homographique n'est monotone **sur aucun intervalle contenant** $-\frac{d}{c}$ (il n'est pas dans son domaine). Dire « f est strictement décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ » est faux : $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ vérifie $f(1) = -4 < 10 = f(3)$ avec $1 < 3$.

19. Transformations de courbes

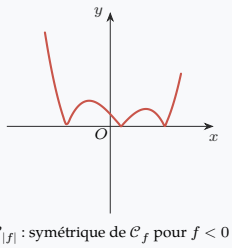
Méthode — Construire une courbe à partir de $\mathcal{C}_f$

Fonction	Courbe obtenue à partir de $\mathcal{C}_f$
$f(x) + b$	translation de vecteur $b\,\vec{j}$
$f(x + a)$	translation de vecteur $-a\,\vec{i}$
$-f(x)$	symétrie par rapport à (Ox)
$f(-x)$	symétrie par rapport à (Oy)
$\lvert f(x)\rvert$	on conserve les arcs où $f \geqslant 0$; on symétrise par rapport à (Ox) les arcs où $f < 0$
$f(\lvert x\rvert)$	on conserve la partie $x \geqslant 0$; on la complète par symétrie par rapport à (Oy)

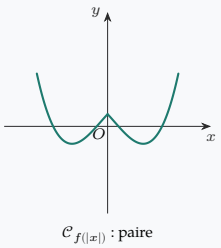
❑ $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_{|f|}$ et $\mathcal{C}_{f(|x|)}$



$\mathcal{C}_f$



$\mathcal{C}_{|f|}$: symétrique de $\mathcal{C}_f$ pour $f < 0$



$\mathcal{C}_{f(|x|)}$: paire

Pour $f(|x|)$, la partie de $\mathcal{C}_f$ située à gauche de l'axe (Oy) est effacée : la courbe est symétrique par rapport à (Oy).

© 2026 — Tous droits réservés

7. Vers l'étude complète d'une fonction

Cette section rassemble, sans démonstration, le vocabulaire utilisé ensuite aux chapitres *Limites* (asymptotes, branches infinies) et *Dérivation* (tangentes, convexité). La notation lim est employée de façon intuitive.

20. Plan d'étude

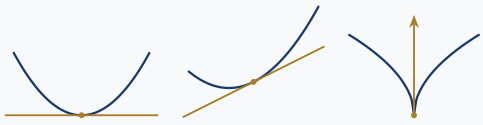
Méthode — Étudier une fonction

1. Domaine de définition $\mathcal{D}_f$; parité, périodicité, axe ou centre de symétrie : réduire l'intervalle d'étude.
2. Limites aux bornes du domaine ; branches infinies.
3. Variations, extremums ; tableau de variations.
4. Tangentes remarquables, points d'intersection avec les axes, concavité.
5. Courbe soignée, avec asymptotes et tangentes.

21. Tangentes

Si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe : s'il vaut 0, la tangente en $A(a\,;f(a))$ est **horizontale** ; s'il vaut $m\in\mathbb{R}^*$, elle est **oblique** de coefficient directeur m ; si le taux tend vers $+\infty$ (à droite) et $-\infty$ (à gauche), la tangente est **verticale** dirigée vers le haut (et vers le bas dans le cas contraire des signes).

❑ Tangente horizontale, oblique, verticale



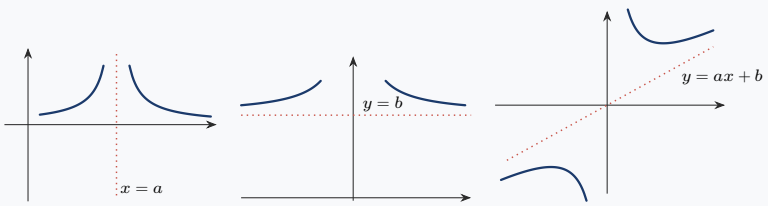
La tangente est la position limite de la sécante lorsque $x_2 \to x_1$.

22. Asymptotes et branches infinies

À retenir — Asymptotes

- ☞ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$: la droite $x=a$ est **asymptote verticale**.
- ☞ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$: la droite $y=b$ est **asymptote horizontale** au voisinage de $\pm\infty$.
- ☞ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big[f(x)-(ax+b)\big]=0$: la droite $y=ax+b$ est **asymptote oblique**.

❑ Asymptotes verticale, horizontale, oblique



Une courbe peut couper son asymptote horizontale ou oblique ; la position relative se lit sur le signe de $f(x)-(ax+b)$.

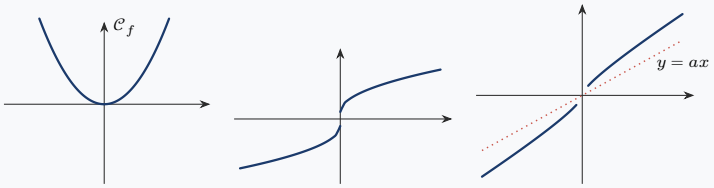
© 2026 — Tous droits réservés

Méthode — Branches infinies si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

On calcule $\lim \dfrac{f(x)}{x}$:

- ☞ $= \pm\infty$: branche parabolique de direction l'axe (Oy) ;
- ☞ $= 0$: branche parabolique de direction l'axe (Ox) ;
- ☞ $= a \in \mathbb{R}^*$: on calcule alors $\lim[f(x) - ax]$: si elle vaut $b \in \mathbb{R}$, asymptote oblique $y = ax + b$; si elle vaut $\pm\infty$, branche parabolique de direction la droite $y = ax$.

❑ **Branches paraboliques**



Directions : (Oy), (Ox), et la droite $y = ax$.

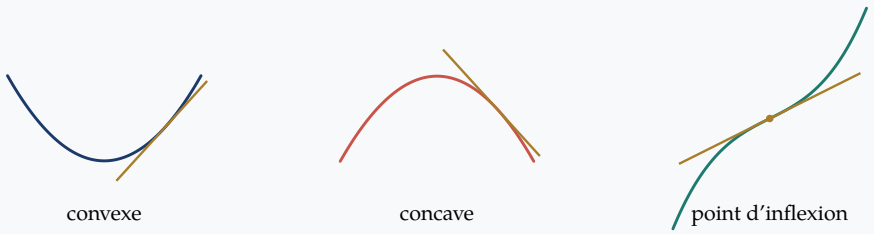
Piège à éviter

$\frac{f(x)}{x} \to a \in \mathbb{R}^*$ **ne suffit pas** pour une asymptote oblique : il faut encore que $f(x) - ax$ ait une limite **finie**.

23. Convexité

Sur un intervalle I : si $f'' \geqslant 0$, $\mathcal{C}_f$ est **convexe** (au-dessus de ses tangentes) ; si $f'' \leqslant 0$, $\mathcal{C}_f$ est **concave** (sous ses tangentes). Un point où f'' s'annule *en changeant de signe* est un **point d'inflexion** : la courbe traverse sa tangente.

❑ **Convexe, concave, inflexion**



$f''(a) = 0$ ne suffit pas : $x \mapsto x^4$ a $f''(0) = 0$ sans point d'inflexion.

© 2026 — Tous droits réservés

Compléments

24. Éclairage historique

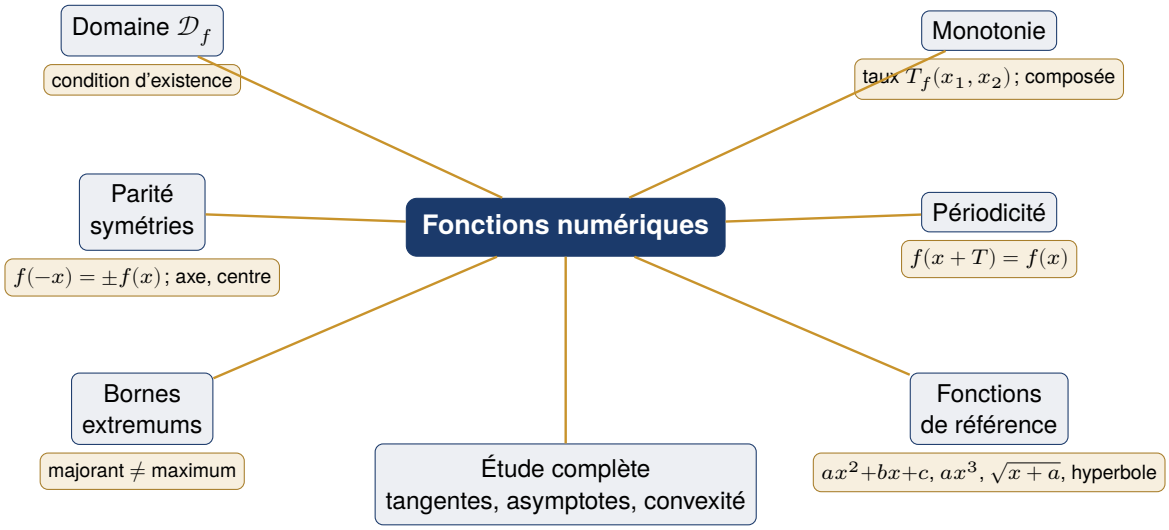
Remarque — De la formule à la correspondance

Au XVIIe siècle, Leibniz emploie le mot « fonction » pour des quantités dépendant d'une courbe ; Euler (1748) l'identifie à une expression analytique. La querelle de la corde vibrante (d'Alembert, Euler, Bernoulli) oblige à admettre des fonctions définies par morceaux. Dirichlet (1837) retient la définition actuelle : une règle associant une valeur à chaque réel, fût-elle sans formule. Son exemple $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, valant 1 sur les rationnels et 0 ailleurs, est périodique de période *tout rationnel strictement positif* et n'admet donc pas de plus petite période.

25. Applications

- **Physique** : un signal sinusoïdal $A\cos(\omega t+\varphi)$ est $\frac{2\pi}{\omega}$-périodique ; la somme de deux signaux de pulsations ω_1,ω_2 n'est périodique que si $\frac{\omega_1}{\omega_2}\in\mathbb{Q}$ (cas du piège $\cos x+\cos\sqrt{2}x$).
- **Informatique** : les fonctions « partie fractionnaire » et « modulo » ($x-E(x)$, restes) sont périodiques ; elles servent à générer des motifs et des suites pseudo-aléatoires.
- **Ingénierie** : une analyse en fréquences exploite la décomposition d'un signal en parties paire et impaire (voir ci-dessous) ; la parité réduit de moitié les calculs.
- **Économie, optimisation** : un profit trinôme $-ax^2+bx-c$ atteint son maximum au sommet ; un coût moyen homographique tend vers une asymptote horizontale.

26. Carte mentale



27. Glossaire des notations

© 2026 — Tous droits réservés

$\mathcal{D}_f$	domaine de définition de f
$\mathcal{C}_f$	courbe représentative de f
$T_f(x_1, x_2)$	taux d'accroissement de f entre x_1 et x_2
$g \circ f$	composée : $x \mapsto g(f(x))$
$f(I)$	image directe : $\{f(x)\ ;\ x \in I\}$
$E(x)$	partie entière : plus grand entier $\leqslant x$
$\Omega(a\,;b)$	centre de symétrie
$D = ad - bc$	déterminant d'une fonction homographique

28. Auto-évaluation

Je sais...	**Je sais**	**Pas encore**
déterminer un domaine en traitant toutes les conditions	☐	☐
vérifier la symétrie du domaine avant d'étudier la parité	☐	☐
démontrer un axe ou un centre de symétrie	☐	☐
distinguer majorant et maximum	☐	☐
étudier une monotonie par le taux d'accroissement	☐	☐
appliquer le théorème de composition en vérifiant $f(I) \subset J$	☐	☐
calculer une période et justifier qu'une somme n'est pas périodique	☐	☐
tracer $\lvert f\rvert$, $f(\lvert x\rvert)$, $f(x+a)+b$	☐	☐

29. Pour aller plus loin (CPGE)

Propriété — Décomposition paire-impaire

Toute fonction f définie sur un domaine symétrique par rapport à 0 s'écrit **de manière unique** $f = p + i$ avec p paire et i impaire : $p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, $i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

Démonstration. Existence : vérification directe. Unicité : si $p + i = p' + i'$, alors $p - p' = i' - i$ est paire et impaire, donc nulle. ■

- **Parité et période** : si f est paire et T-périodique, la droite $x = \frac{T}{2}$ est un axe de symétrie ; si f est impaire et T-périodique, $f(\frac{T}{2}) = 0$ et $\Omega(\frac{T}{2}\,;0)$ est un centre.
- **Monotonie sans régularité** : une fonction monotone peut être discontinue (la partie entière). La classification des fonctions monotones relève de l'analyse supérieure.
- **Exemple d'onde triangulaire** : le problème de synthèse 3 montre qu'une somme de deux fonctions périodiques peut être constante.

© 2026 — Tous droits réservés

Domaine, parité, symétries

À retenir — Domaine

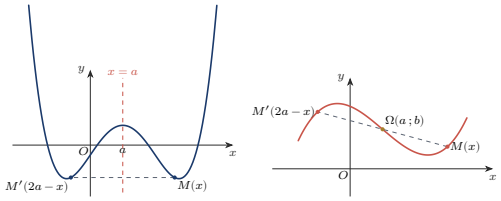
$\frac{1}{u}$: $u \neq 0$; $\sqrt{u}$: $u \geqslant 0$; $\frac{1}{\sqrt{u}}$: $u > 0$; $\tan u$: $u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $g \circ f$: $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) \in \mathcal{D}_g$. Résoudre *avant* de simplifier.

À retenir — Parité

Toujours : $x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow -x \in \mathcal{D}_f$.
Paire : $f(-x) = f(x)$, $\mathcal{C}_f$ symétrique par rapport à (Oy).
Impaire : $f(-x) = -f(x)$, $\mathcal{C}_f$ symétrique par rapport à O.
Paire et impaire $\Rightarrow f = 0$.

À retenir — Axe et centre

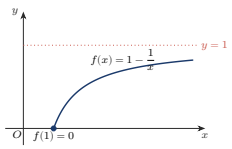
Axe $x = a$: $2a - x \in \mathcal{D}_f$ et $f(2a-x) = f(x)$.
Centre $\Omega(a;b)$: $2a - x \in \mathcal{D}_f$ et $f(2a-x) + f(x) = 2b$.
Équivalent : $t \mapsto f(a+t)$ paire ; $t \mapsto f(a+t) - b$ impaire.



Bornes et extremums

À retenir

Bornée $\iff \exists K,\ |f| \leqslant K$. Prouver $f \leqslant M$: signe de $M - f$.
Maximum = majorant *atteint*. Trinôme : extremum $-\frac{\Delta}{4a}$ en $-\frac{b}{2a}$.



Monotonie

À retenir — Taux d'accroissement

$T_f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$; signe $\geqslant 0$ (resp. > 0) $\iff$ f croissante (resp. str. croissante) ; $\leqslant 0, < 0$ pour la décroissance. Factoriser par $x_1 - x_2$.

À retenir — Opérations

kf : même sens si $k > 0$, contraire si $k < 0$. $f + g$: même sens si f, g de même sens ; sinon, aucune conclusion. $g \circ f$ avec $f(I) \subset J$: croissante si f, g de même sens, décroissante sinon.
Paire : sens contraire sur I et $-I$; impaire : même sens.

Piège à éviter

Monotonie sur un *intervalle* : $\frac{1}{x}$ décroît sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, pas sur $\mathbb{R}^*$.

Périodicité

À retenir

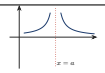
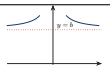
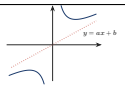
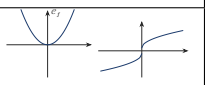
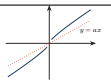
$x \pm T \in \mathcal{D}_f$ et $f(x+T) = f(x)$. $f(ax+b)$: $\frac{T}{|a|}$. sin, cos : 2π ; tan : π. Somme : rapport des périodes rationnel $\frac{p}{q}$, période $qT_1 = pT_2$. $x - E(x)$: 1.

Fonctions de référence

$ax^2 + bx + c$	axe $x = -\frac{b}{2a}$, sommet, $T = a(x_1 + x_2) + b$
ax^3	str. monotone, centre O, $T = a(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$
$\sqrt{x+a}$	str. croissante sur $[-a, +\infty[$
$\frac{ax+b}{cx+d}$	$T = \frac{ad-bc}{(cx_1+d)(cx_2+d)}$, centre $\Omega(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c})$

© 2026 — Tous droits réservés

Étude complète : tangentes et branches infinies

Limite	Conclusion	Figure
$\lim\limits_{x\to a} f = \pm\infty$	asymptote verticale $x = a$	
$\lim\limits_{\pm\infty} f = b$	asymptote horizontale $y = b$	
$\lim\limits_{\pm\infty}[f - (ax+b)] = 0$	asymptote oblique $y = ax + b$	
$\lim \frac{f}{x} = \pm\infty$ ou 0	branche parabolique direction (Oy) ou (Ox)	
$\lim \frac{f}{x} = a$, $\lim(f - ax) = \pm\infty$	branche parabolique direction $y = ax$	

Tangente en a : taux $\to 0$ horizontale ; $\to m \in \mathbb{R}^*$ oblique ; $\to \pm\infty$ verticale. **Convexité** : $f'' \geqslant 0$ convexe, $f'' \leqslant 0$ concave ; inflexion si f'' change de signe.

© 2026 — Tous droits réservés

QCM — 21 questions

Rappel de cours

21 questions à choix unique (A, B, C, D), classées en trois niveaux de sept questions. Durée conseillée : 45 minutes, sans calculatrice. Une seule proposition est exacte. Barème : 1 point par réponse exacte, 0 en cas d'erreur ou d'abstention ; note sur 20 : $\frac{20}{21}\times$ nombre de réponses exactes.

★★☆☆ Niveau moyen

1. Le domaine de définition de $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$ est :

A. $[0,2]$ **B.** $[0,1[\cup]1,2]$

C. $]-\infty,0]\cup[2,+\infty[$ **D.** $]0,2[\setminus\{1\}$

2. Parmi les fonctions suivantes, laquelle est **paire** ?

A. $x\mapsto(x-1)^2$ **B.** $x\mapsto x\,|x|$

C. $x\mapsto\sqrt{x^2}-3$ **D.** $x\mapsto\sqrt{x}$

3. Soit $f(x)=x^2-3x+2$. Parmi les intervalles suivants, lequel est le **plus grand** intervalle de la forme $[\alpha,+\infty[$ sur lequel f est strictement croissante ?

A. $\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right[$ **B.** $[3,+\infty[$

C. $[0,+\infty[$ **D.** $[1,+\infty[$

4. Soit $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$. Quelle affirmation est **vraie** ?

A. f n'est pas minorée **B.** f n'a pas de maximum

C. f est croissante sur $\mathbb{R}$ **D.** $|f(x)|\leqslant 1$ pour tout réel x, et $f(1)=1$

5. Parmi les ensembles suivants, lequel est un intervalle sur lequel $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ est strictement croissante ?

A. $[0,+\infty[$ **B.** $]-\infty,0]$

C. $\mathbb{R}$ **D.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

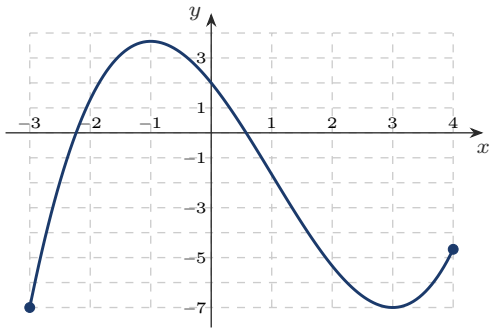
© 2026 — Tous droits réservés

6. La plus petite période strictement positive de $x \mapsto \cos\left(\dfrac{3x}{2}\right)$ est :

A. $\dfrac{4\pi}{3}$ **B.** 3π

C. $\dfrac{2\pi}{3}$ **D.** 2π

7. La courbe de f est tracée sur $[-3,4]$ (graduations de pas 1).



Quelle affirmation est **vraie** ?

A. le minimum de f sur $[-3,4]$ est -7, atteint uniquement en $x=3$ **B.** f est décroissante sur $[-1,4]$

C. f n'admet aucun minimum local **D.** le maximum de f sur $[-3,4]$ est atteint en $x=-1$ et en aucun autre point

★★★☆ Niveau bon

8. La courbe de $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$ admet pour centre de symétrie le point :

A. $\Omega(2\,;3)$ **B.** $\Omega(-3\,;2)$

C. $\Omega(3\,;2)$ **D.** $\Omega\left(3\,;-\frac{1}{3}\right)$

9. Soit f paire et g impaire, toutes deux définies sur $\mathbb{R}$. Laquelle de ces affirmations est **toujours** vraie ?

A. $f+g$ est paire **B.** $f\times g$ est impaire

C. $g\circ f$ est impaire **D.** $f\circ g$ est impaire

10. Soit $f(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$. Alors f est définie sur $[1,3]$ et :

A. f est strictement croissante sur $[1,2]$ et strictement décroissante sur $[2,3]$ **B.** f est strictement décroissante sur $[1,2]$ puis croissante sur $[2,3]$

C. f est strictement croissante sur $[1,3]$ **D.** f est strictement croissante sur $[2,+\infty[$

© 2026 — Tous droits réservés

11. Soit $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$ sur $[0, +\infty[$. Quelle affirmation est **vraie** ?

A. g admet 1 comme maximum

B. g n'est pas majorée

C. g est décroissante

D. g est majorée par 1 et n'a pas de maximum

12. La plus petite période strictement positive de $f(x) = \sin(2x) + \cos(3x)$ est :

A. π

B. $\dfrac{2\pi}{3}$

C. 2π

D. 4π

13. Soit $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$. Quelle affirmation est **vraie** ?

A. f est strictement décroissante sur $]2, +\infty[$ et sur $]-\infty, 2[$

B. f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

C. f est strictement croissante sur $]-\infty, 2[$

D. $f(1) > f(3)$

14. Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$. Quelle affirmation est **vraie** ?

A. f est strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$

B. f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$ et strictement croissante sur $[3, +\infty[$

C. f est strictement croissante sur $]-\infty, -1]$ et strictement décroissante sur $[3, +\infty[$

D. f est strictement croissante sur $\mathcal{D}_f$

★★★★ Niveau difficile

15. La négation de « f est monotone sur $\mathbb{R}$ » est :

A. $\exists x < y,\ f(x) > f(y)$

B. $\forall x < y,\ f(x) \neq f(y)$

C. $\exists x < y,\ \exists u < v,\ f(x) > f(y)$ et $f(u) < f(v)$

D. $\exists x < y,\ f(x) > f(y)$ et $f(x) < f(y)$

16. Soit f et g strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. Laquelle de ces affirmations est **toujours** vraie ?

A. $f \times g$ est strictement croissante

B. $f - g$ est strictement croissante

C. $\dfrac{f}{g}$ est strictement croissante (là où elle est définie)

D. $g \circ f$ est strictement croissante

© 2026 — Tous droits réservés

17. La fonction $f(x) = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-x^2}$ est :

A. paire mais pas impaire

B. à la fois paire et impaire

C. impaire mais pas paire

D. ni paire ni impaire

18. La fonction $f(x) = \cos x + \cos(\sqrt{2}\,x)$ est :

A. non périodique

B. périodique de période 2π

C. périodique de période $2\pi\sqrt{2}$

D. périodique de période $2\pi(1+\sqrt{2})$

19. On admet $T_f(x_1,x_2) = \dfrac{2(1-x_1x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$ pour $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$. Laquelle de ces affirmations est **vraie** ?

A. f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

B. f est strictement décroissante sur $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

C. f est strictement croissante sur $[-1,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$

D. f est strictement décroissante sur $[-1,1]$

20. Soit f une fonction impaire sur $\mathbb{R}$, strictement décroissante sur $[0,+\infty[$. Alors :

A. f est strictement croissante sur $]-\infty,0]$ et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$

B. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

C. on ne peut rien conclure sur $]-\infty,0]$

D. f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

21. Soit f une fonction paire et 4-périodique sur $\mathbb{R}$. Quelle droite est **toujours** un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$?

A. $x=1$

B. $x=2$

C. $x=3$

D. $x=5$

© 2026 — Tous droits réservés

Corrigé du QCM

30. Grille des réponses

1 B	**2** C	**3** A	**4** D	**5** B	**6** A	**7** D
8 C	**9** B	**10** A	**11** D	**12** C	**13** A	**14** B
15 C	**16** D	**17** B	**18** A	**19** C	**20** D	**21** B

Correction — Q1 — Réponse B

Notion : Domaine · Niveau N1

Il faut $2x - x^2 \geqslant 0$, soit $x(2-x) \geqslant 0 \iff x \in [0,2]$, et $x - 1 \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f = [0,2] \setminus \{1\} = [0,1[\cup]1,2]$.

Pourquoi les autres propositions sont fausses.

- **A** : oublie la condition $x \neq 1$ du dénominateur.
- **C** : inverse le signe du trinôme : $2x - x^2 = x(2-x) \geqslant 0 \iff x \in [0,2]$.
- **D** : remplace les inégalités larges par des strictes : 0 et 2 appartiennent au domaine.

À retenir : Toutes les conditions d'existence se résolvent puis s'intersectent.

Correction — Q2 — Réponse C

Notion : Parité · Niveau N1

$\sqrt{x^2} = |x|$; $f(x) = |x| - 3$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $f(-x) = |-x| - 3 = f(x)$.

Pourquoi les autres propositions sont fausses.

- **A** : $f(1) = 0$ et $f(-1) = 4$: ni paire ni impaire.
- **B** : $f(-x) = -x|x| = -f(x)$: impaire.
- **D** : domaine $\mathbb{R}^+$ non symétrique par rapport à 0 : ni paire ni impaire.

À retenir : Vérifier d'abord la symétrie du domaine, puis comparer $f(-x)$ à $\pm f(x)$.

Correction — Q3 — Réponse A

Notion : Monotonie · Niveau N1

$T_f(x_1,x_2) = x_1 + x_2 - 3$. Pour $x_1 \neq x_2$ dans $[\alpha, +\infty[$: $x_1 + x_2 > 2\alpha$. Si $\alpha \geqslant \frac{3}{2}$, alors $x_1 + x_2 > 3$ et le taux est > 0 ; si $\alpha < \frac{3}{2}$, les points α et $\frac{3}{2}$ donnent $T_f(\alpha, 3/2) = \alpha - \frac{3}{2} < 0$. Le plus petit α possible est $\frac{3}{2} = -\frac{b}{2a}$.

Pourquoi les autres propositions sont fausses.

- **B** : f y est bien strictement croissante, mais l'intervalle n'est pas maximal : $T_f(x_1,x_2) > 0$ dès que $x_1 + x_2 > 3$, en particulier sur $[\frac{3}{2}, +\infty[$.
- **C** : $f(0) = 2 > f(1) = 0$: f décroît sur $[0,1]$.
- **D** : $f(1) = 0 > f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$: f décroît entre 1 et $\frac{3}{2}$.

À retenir : Pour un trinôme, le changement de sens a lieu en $-\frac{b}{2a}$.

Correction — Q4 — Réponse D

Notion : Bornes · Niveau N1

$1 - f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \geqslant 0$ et $1 + f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \geqslant 0$, d'où $-1 \leqslant f \leqslant 1$; $f(1) = 1$.

© 2026 — Tous droits réservés

Pourquoi les autres propositions sont fausses.

☞ **A** : $1+f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}\geqslant 0$: $f\geqslant -1$.

☞ **B** : $f(1)=1$ est un majorant atteint : c'est le maximum.

☞ **C** : $f(2)=\frac{4}{5}<f(1)=1$ avec $1<2$.

À retenir : Prouver une borne : étudier le signe de $M-f$.

Correction — Q5 — Réponse B

Notion : Composée · Niveau N1

Sur $]-\infty,0]$, $v(x)=x^2+1$ est strictement décroissante, à valeurs dans $[1,+\infty[$, où $u(t)=\frac{1}{t}$ est strictement décroissante ; la composée est strictement croissante.

Pourquoi les autres propositions sont fausses.

☞ **A** : sur $[0,+\infty[$, x^2+1 croît et $t\mapsto\frac{1}{t}$ décroît : f y décroît.

☞ **C** : $f(-1)=f(1)=\frac{1}{2}$: pas strictement croissante.

☞ **D** : ce n'est pas un intervalle, et $f(-1)=f(1)$.

À retenir : Deux décroissances composées donnent une croissance, à condition que $f(I)\subset J$.

Correction — Q6 — Réponse A

Notion : Périodicité · Niveau N1

$\cos(\omega x)$ a pour plus petite période $\frac{2\pi}{|\omega|}$ avec $\omega=\frac{3}{2}$: $\frac{2\pi}{3/2}=\frac{4\pi}{3}$.

Pourquoi les autres propositions sont fausses.

☞ **B** : multiplie 2π par $\frac{3}{2}$ au lieu de diviser.

☞ **C** : oublie le facteur $\frac{1}{2}$: c'est la période de $\cos 3x$.

☞ **D** : ne tient pas compte du coefficient de x.

À retenir : $f(ax+b)$ a pour période $\frac{T}{|a|}$.

Correction — Q7 — Réponse D

Notion : Extremums · Niveau N1

La courbe est celle de $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x+2$: $f(x)-\frac{11}{3}=\frac{(x+1)^2(x-5)}{3}\leqslant 0$ sur $[-3,4]$, avec égalité seulement en -1.

Pourquoi les autres propositions sont fausses.

☞ **A** : $f(-3)=-7$ également : le minimum est atteint en deux points.

☞ **B** : f croît de 3 à 4 après son minimum local en 3.

☞ **C** : f admet un minimum local en $x=3$ (intervalle ouvert $]2,4[$).

À retenir : Un extremum peut être atteint en plusieurs points ; lire les extrémités de l'intervalle.

Correction — Q8 — Réponse C

Notion : Symétrie · Niveau N2

$\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{3\}$ est stable par $x\mapsto 6-x$ et $f(6-x)+f(x)=\frac{13-2x}{3-x}+\frac{2x+1}{x-3}=\frac{4x-12}{x-3}=4=2\times 2$.

Pourquoi les autres propositions sont fausses.

☞ **A** : coordonnées permutées.

☞ **B** : le signe de l'abscisse : $-\frac{d}{c}=3$, et non -3.

© 2026 — Tous droits réservés

☞ **D** : utilise $\frac{b}{d}$ au lieu de $\frac{a}{c}$.

À retenir : Centre $\Omega(-\frac{d}{c};\frac{a}{c})$ pour une homographique.

Correction — Q9 — Réponse B

Notion : Parité · Niveau N2

$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)(-g(x)) = -(fg)(x)$.

Pourquoi les autres propositions sont fausses.

☞ **A** : $f(x) = x^2$, $g(x) = x$: $(f+g)(1) = 2$, $(f+g)(-1) = 0$.

☞ **C** : $g(f(-x)) = g(f(x))$: $g \circ f$ est paire.

☞ **D** : $f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x))$: $f \circ g$ est paire.

À retenir : Paire $\times$ impaire = impaire ; $g\circ f$ et $f\circ g$ sont paires dès que f est paire ou g impaire.

Correction — Q10 — Réponse A

Notion : Composée · Niveau N2

$-x^2+4x-3 = 1-(x-2)^2 = -(x-1)(x-3)$. $u : x \mapsto -x^2+4x-3$ croît sur $[1,2]$, décroît sur $[2,3]$, à valeurs dans $[0,1]$ où $\sqrt{\ }$ croît.

Pourquoi les autres propositions sont fausses.

☞ **B** : confond avec un trinôme de coefficient dominant positif : ici $a = -1 < 0$.

☞ **C** : $f(2) = 1 > f(3) = 0$.

☞ **D** : $[2,+\infty[\not\subset \mathcal{D}_f$: f n'est pas définie au-delà de 3.

À retenir : Le domaine borne toujours les intervalles de variation.

Correction — Q11 — Réponse D

Notion : Extremums · Niveau N2

$g(x) = 1-\frac{1}{x+1} < 1$. g est strictement croissante, donc pour tout $a \geqslant 0$, $g(a+1) > g(a)$: aucune valeur n'est maximale. (g a pour minimum $g(0) = 0$.)

Pourquoi les autres propositions sont fausses.

☞ **A** : $g(x) = 1 \iff x = x+1$ est impossible : 1 n'est jamais atteint.

☞ **B** : $g(x) = 1-\frac{1}{x+1} < 1$.

☞ **C** : $T_f(x_1,x_2) = \frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} > 0$: g est strictement croissante.

À retenir : Majorant atteint $\iff$ maximum.

Correction — Q12 — Réponse C

Notion : Périodicité · Niveau N2

Périodes π et $\frac{2\pi}{3}$, rapport $\frac{3}{2}$: $2\pi = 2\times\pi = 3\times\frac{2\pi}{3}$ est une période. Aucun $T \in]0,2\pi[$ ne convient (vérifié : en particulier π et $\frac{2\pi}{3}$ ne sont pas des périodes).

Pourquoi les autres propositions sont fausses.

☞ **A** : c'est la période de $\sin 2x$ seulement : $f(x+\pi) = \sin 2x - \cos 3x \neq f(x)$.

☞ **B** : c'est la période de $\cos 3x$ seulement.

☞ **D** : c'est une période, mais pas la plus petite.

À retenir : Période d'une somme : multiple commun, rapport rationnel.

© 2026 — Tous droits réservés

Correction — Q13 — Réponse A

Notion : Monotonie · Niveau N2

$T_f(x_1,x_2) = \dfrac{-7}{(x_1-2)(x_2-2)} < 0$ sur chacun des deux intervalles (les deux facteurs ont même signe).

Pourquoi les autres propositions sont fausses.

☞ **B** : monotonie sur une réunion : $f(1) = -4 < 10 = f(3)$.

☞ **C** : $D = ad - bc = 3 \times (-2) - 1 \times 1 = -7 < 0$: elle décroît.

☞ **D** : $f(1) = -4$ et $f(3) = 10$.

À retenir : Homographique : le signe du déterminant donne le sens, sur chaque intervalle séparément.

Correction — Q14 — Réponse B

Notion : Composée · Niveau N2

$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) \geqslant 0$: $\mathcal{D}_f =]-\infty,-1] \cup [3,+\infty[$. Le trinôme décroît sur $]-\infty,1] \supset]-\infty,-1]$ et croît sur $[1,+\infty[\supset [3,+\infty[$; $\sqrt{\ }$ croît.

Pourquoi les autres propositions sont fausses.

☞ **A** : ignore le domaine $]-\infty,-1] \cup [3,+\infty[$: f n'est pas définie en 0.

☞ **C** : sens inversé.

☞ **D** : $f(-2) = \sqrt{5} > f(-1) = 0$ avec $-2 < -1$.

À retenir : Le sommet $1 \notin \mathcal{D}_f$ ne sépare rien.

Correction — Q15 — Réponse C

Notion : Logique · Niveau N3

« Monotone » = (croissante) **ou** (décroissante). Sa négation = non croissante **et** non décroissante : $\exists x < y,\ f(x) > f(y)$ **et** $\exists u < v,\ f(u) < f(v)$, avec deux couples a priori distincts.

Pourquoi les autres propositions sont fausses.

☞ **A** : c'est seulement la négation de « croissante ».

☞ **B** : c'est « injective », sans lien avec la monotonie.

☞ **D** : proposition toujours fausse (même couple (x,y)).

À retenir : Non (A ou B) = non A et non B ; deux $\exists$ indépendants.

Correction — Q16 — Réponse D

Notion : Monotonie · Niveau N3

$x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \Rightarrow g(f(x)) < g(f(y))$; $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} = \mathcal{D}_g$.

Pourquoi les autres propositions sont fausses.

☞ **A** : $f = g = \mathrm{id} : x \mapsto x^2$ n'est pas croissante.

☞ **B** : $f = g$: la différence est nulle.

☞ **C** : $f = g = \mathrm{id}$: $\frac{f}{g} = 1$ sur $\mathbb{R}^*$ est constante.

À retenir : Seules la somme et la composée conservent la croissance ; différence, produit, quotient, non.

© 2026 — Tous droits réservés

Correction — Q17 — Réponse B

Notion : Parité · Niveau N3

Il faut $x^2 \geqslant 1$ et $x^2 \leqslant 1$: $\mathcal{D}_f = \{-1, 1\}$, symétrique par rapport à 0, et $f(\pm 1) = 0$. Donc $f(-x) = f(x) = -f(x)$.

Pourquoi les autres propositions sont fausses.

☞ **A** : f est nulle sur son domaine $\{-1, 1\}$: elle est aussi impaire.

☞ **C** : idem : $f(-x) = f(x)$ aussi.

☞ **D** : son domaine $\{-1, 1\}$ est symétrique et $f(\pm 1) = 0$.

À retenir : Seule la fonction nulle (sur un domaine symétrique) est à la fois paire et impaire.

Correction — Q18 — Réponse A

Notion : Périodicité · Niveau N3

Si $T > 0$ était une période, $f(T) = f(0) = 2$ imposerait $\cos T = \cos(\sqrt{2}T) = 1$, donc $T = 2k\pi$ et $\sqrt{2}T = 2m\pi$ $(k, m \in \mathbb{N}^*)$, d'où $\sqrt{2} = \frac{m}{k} \in \mathbb{Q}$: absurde.

Pourquoi les autres propositions sont fausses.

☞ **B** : $f(2\pi) = 1 + \cos(2\sqrt{2}\pi) \neq 2 = f(0)$.

☞ **C** : $f(2\pi\sqrt{2}) = \cos(2\pi\sqrt{2}) + 1 \neq 2$.

☞ **D** : $\cos(2\pi(1 + \sqrt{2})) = \cos(2\pi\sqrt{2}) \neq 1$.

À retenir : Une somme de fonctions périodiques n'est périodique que si le rapport des périodes est rationnel.

Correction — Q19 — Réponse C

Notion : Monotonie · Niveau N3

Sur $[-1, 1]$: $|x_1 x_2| \leqslant 1$ avec égalité seulement si $|x_1| = |x_2| = 1$; pour $x_1 \neq x_2$ on a $x_1 x_2 < 1$ (le cas $x_1 x_2 = 1$ avec $|x_i| \leqslant 1$ impose $x_1 = x_2 = \pm 1$). Donc $T_f(x_1, x_2) > 0$. Sur $[1, +\infty[$: $x_1 x_2 > 1$ et $T_f(x_1, x_2) < 0$.

Pourquoi les autres propositions sont fausses.

☞ **A** : $f(2) = \frac{4}{5} < f(1) = 1$.

☞ **B** : monotonie sur une réunion : $f(-2) = -\frac{4}{5} < f(2) = \frac{4}{5}$ avec $-2 < 2$.

☞ **D** : pour $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, $x_1 \neq x_2$: $x_1 x_2 < 1$ donc $T_f(x_1, x_2) > 0$.

À retenir : Un taux de signe variable découpe l'intervalle selon le signe d'un facteur.

Correction — Q20 — Réponse D

Notion : Parité · Niveau N3

Impaire : même sens sur $[0, +\infty[$ et $]-\infty, 0]$, donc strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$. De plus $f(0) = 0$; pour $x < 0 < y$: $f(x) > f(0) = 0 > f(y)$. Elle est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (exemple : $x \mapsto -x^3$).

Pourquoi les autres propositions sont fausses.

☞ **A** : c'est le comportement d'une fonction *paire* ; ici la parité conserve le sens.

☞ **B** : contredit la décroissance sur $[0, +\infty[$.

☞ **C** : la parité impose le sens sur $]-\infty, 0]$.

À retenir : Impaire : même sens des deux côtés de 0 ; on raccorde en 0 avec $f(0) = 0$.

© 2026 — Tous droits réservés

Correction — Q21 — Réponse B

Notion : Symétrie · Niveau N3

$f(4-x)=f(-x)=f(x)$ (4-périodicité puis parité) : $f(2a-x)=f(x)$ avec $a=2$. Les contre-exemples ci-dessus écartent 1, 3 et 5.

Pourquoi les autres propositions sont fausses.

☞ **A** : $f(x)=\cos\frac{\pi x}{2}$ est paire et 4-périodique, mais $f(2-x)=-\cos\frac{\pi x}{2}\neq f(x)$.

☞ **C** : même fonction : $f(6-x)=\cos\left(3\pi-\frac{\pi x}{2}\right)=-f(x)$.

☞ **D** : même fonction : $f(10-x)=\cos\left(5\pi-\frac{\pi x}{2}\right)=-f(x)$.

À retenir : Paire et T-périodique : axes $x=k\frac{T}{2}$.

Barème et diagnostic

Réponses exactes	Diagnostic
19 à 21	excellent : maîtrise complète, passer aux problèmes
15 à 18	bon : revoir les pièges signalés dans les corrections
10 à 14	moyen : relire le cours (sections concernées) et refaire les exercices 1 à 7
0 à 9	insuffisant : reprendre le cours et la fiche avant de refaire le QCM

31. Notions à revoir selon les erreurs

☞ Q1 : domaine ; Q2, Q9, Q17 : parité ; Q3, Q5, Q10, Q13, Q14, Q16, Q19, Q20 : monotonie ; Q4, Q7, Q11 : bornes et extremums ;

☞ Q6, Q12, Q18 : périodicité ; Q8, Q21 : axes et centres de symétrie ; Q15 : logique et quantificateurs.

© 2026 — Tous droits réservés

Exercices

Exercice 1 — Domaines de définition

★☆☆☆ Basique

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$
3. $f_3(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - x - 6}$
4. $f_4(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$
5. $f_5(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$
6. $f_6(x) = \dfrac{1}{|x| - 2}$
7. $f_7(x) = \sqrt{1 - |x-1|}$
8. $f_8(x) = \tan(2x)$
9. $f_9(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

Exercice 2 — Parité

★★☆☆ Classique

Étudier la parité des fonctions suivantes (après avoir déterminé leur domaine).

1. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 1}$
2. $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{4 - x^2}}$
3. $h(x) = \dfrac{\sin x}{2\cos x - 1}$
4. $k(x) = \dfrac{x^3}{x^3 + x}$
5. $l(x) = \sqrt{|x|} + \sqrt{x^4 + 1}$
6. $m(x) = x^3 - x^2 + 1$

Exercice 3 — Bornes et extremums

★★☆☆ Classique

Montrer que les fonctions suivantes sont bornées ou majorées, et préciser leurs extremums éventuels.

1. $f(x) = 3\cos x + 4$ sur $\mathbb{R}$
2. $g(x) = 2x^2 - 4x - 1$ sur $\mathbb{R}$
3. $h(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$

© 2026 — Tous droits réservés

4. $k(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ (comparer $k(x)$ à $\frac{1}{2}$ et à $-\frac{1}{2}$)

Exercice 4 — Monotonie par le taux d'accroissement

★★☆☆ Important

Étudier, à l'aide du taux d'accroissement, les variations de :

1. $f(x) = x^2 - 4x + 1$ sur $[2, +\infty[$ et sur $]-\infty, 2]$
2. $g(x) = \sqrt{2x+1}$ sur son domaine
3. $h(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$ sur chaque intervalle de son domaine
4. $k(x) = x + \dfrac{1}{x}$ sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$

Exercice 5 — Parité et monotonie

★★★☆ Important

Soit $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$.

1. Montrer que f est impaire.
2. Calculer $T_f(x_1, x_2)$ et étudier les variations de f sur $[0, 2]$ puis sur $[2, +\infty[$.
3. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $|f(x)| \leqslant 1$ pour tout réel x ; préciser les extremums de f.

Exercice 6 — Composée et monotonie

★★★☆ Classique

Soit $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$.
2. Écrire $f = g \circ h$ avec h homographique, et justifier $h(I) \subset \mathcal{D}_g$ pour chaque intervalle I de $\mathcal{D}_f$.
3. Étudier les variations de f sur chaque intervalle de $\mathcal{D}_f$.

Exercice 7 — Périodicité

★★☆☆ Classique

Déterminer une période (la plus petite possible lorsque c'est demandé) de :

1. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$
2. $\cos\frac{x}{3}$
3. $\tan\frac{x}{4}$
4. $\sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(6x - \frac{\pi}{4}\right)$
5. $\cos(2x+3) + \sin\left(\frac{3x}{2} + 1\right)$
6. $\dfrac{1 - \sin 3x}{1 + \sin 2x}$
7. $x - E(x)$

© 2026 — Tous droits réservés

8. $E(2x) - 2x + 3$
9. $E(\frac{x}{2\pi}) - \frac{x}{2\pi}$

Exercice 8 — Prolongement d'une fonction périodique ★★★☆ Classique

1. Soit f paire et 2-périodique sur $\mathbb{R}$, avec $f(x) = 1 - x$ sur $[0, 1]$. Calculer $f(2)$, $f(3)$, $f\left(\frac{5}{2}\right)$, $f(-1)$, $f(-2)$.
2. Soit f impaire et 2-périodique sur $\mathbb{R}$, avec $f(x) = 2x(1 - x)$ sur $[0, 1]$. Calculer $f(2)$, $f(3)$, $f\left(\frac{5}{2}\right)$, $f(-1)$, $f\left(-\frac{3}{2}\right)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 9 — Axes et centres de symétrie ★★★☆ Classique

Démontrer les symétries suivantes.

1. $\mathcal{C}_f$ de $f(x) = x^2 - 4x + 1$ admet la droite $x = 2$ pour axe.
2. $\mathcal{C}_f$ de $g(x) = \dfrac{3x - 1}{x + 2}$ admet $\Omega(-2\,;3)$ pour centre.
3. $\mathcal{C}_f$ de $h(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ admet $\Omega(1\,;0)$ pour centre.
4. $\mathcal{C}_f$ de $k(x) = |x - 1| + |x - 3|$ admet la droite $x = 2$ pour axe.

Exercice 10 — Parité, périodicité, symétrie ★★★★ Original

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et T-périodique ($T > 0$).

1. On suppose f paire. Montrer que la droite $x = \frac{T}{2}$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
2. On suppose f impaire. Montrer que $f\left(\frac{T}{2}\right) = 0$ et que $\Omega\left(\frac{T}{2}\,;0\right)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
3. Application : $f(x) = \sin(\pi x)$ ($T = 2$). Vérifier directement les deux résultats précédents.

Exercice 11 — Fonction avec valeurs absolues ★★★★ Original

Soit $f(x) = \sqrt{2|x + 1| - |x| - x}$.

1. Montrer que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. Écrire $f(x)$ sans valeur absolue sur $]-\infty, -1[$, $[-1, 0[$ et $[0, +\infty[$.
3. Étudier la monotonie de f sur chacun de ces intervalles et dresser son tableau de variations.
4. Représenter $\mathcal{C}_f$ (allure) et déterminer l'extremum de f.

© 2026 — Tous droits réservés

Problèmes

Problème 1 — Fonction homographique sous radical

★★★★ Classique

Soit $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x-3}{x-2}}$.

Partie A — Étude de f

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$. Vérifier que $\dfrac{2x-3}{x-2} = 2 + \dfrac{1}{x-2}$.
2. Étudier les variations de f sur chaque intervalle de $\mathcal{D}_f$.
3. Calculer $f(3)$ et $f(0)$. Déterminer $f(]2,3])$.

Partie B — Fonction $g(x) = f(|x|)$

1. Déterminer $\mathcal{D}_g$ et la parité de g.
2. Dresser le tableau de variations de g.
3. Discuter, selon le réel m, le nombre de solutions de l'équation $g(x) = m$.

Problème 2 — Un trinôme et une racine

★★★★ Important

Soit $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ et $g(x) = \sqrt{x-1}$.

1. Étudier les variations de f ; déterminer $f([0,1])$ et $f([1,2])$.
2. Montrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un unique point commun A ; on posera $t = \sqrt{x-1}$ et on factorisera $t^4 + t - 2$.
3. Résoudre l'inéquation $g(x) < f(x)$.
4. Soit $h(x) = \sqrt{-x^2+2x}$. Déterminer $\mathcal{D}_h$ et étudier les variations de h sur $[0,1]$ puis sur $[1,2]$.

Problème 3 — Onde triangulaire

★★★★ Original

Soit f la fonction 2-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = |x|$ pour $x \in [-1,1]$.

1. Montrer que f est paire et que, pour tout réel x, $f(x) = \left|x - 2E\left(\dfrac{x+1}{2}\right)\right|$. Calculer $f\left(\frac{7}{2}\right)$ et $f\left(-\frac{13}{3}\right)$.
2. Montrer que les droites $x = k$ $(k \in \mathbb{Z})$ sont des axes de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
3. Montrer que, pour tout x, $f(1-x) + f(x) = 1$; en déduire que les points $\Omega_k\left(k + \frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ sont des centres de symétrie.
4. Montrer que $f(x+1) = 1 - f(x)$, puis que $f(x) + f(x+1) = 1$; en déduire que $x \mapsto f(x) + f(x+1)$ est constante, bien que f et $x \mapsto f(x+1)$ ne le soient pas.
5. Représenter $\mathcal{C}_f$ sur $[-3,3]$.

© 2026 — Tous droits réservés

Corrigés des exercices

Correction — Exercice 1 — Domaines

1. $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\geqslant 0$: $\mathcal{D}_1=]-\infty,2]\cup[3,+\infty[$.
2. $4-x^2>0$: $\mathcal{D}_2=]-2,2[$.
3. $x^2-x-6=(x-3)(x+2)\neq 0$: $\mathcal{D}_3=\mathbb{R}\setminus\{-2,3\}$.
4. $\frac{x+1}{x-2}\geqslant 0$ et $x\neq 2$: $\mathcal{D}_4=]-\infty,-1]\cup]2,+\infty[$.
5. $x\geqslant 1$ et $x\leqslant 3$: $\mathcal{D}_5=[1,3]$.
6. $|x|\neq 2$: $\mathcal{D}_6=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$.
7. $|x-1|\leqslant 1 \iff 0\leqslant x\leqslant 2$: $\mathcal{D}_7=[0,2]$.
8. $2x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi$: $\mathcal{D}_8=\left\{x\in\mathbb{R}\ :\ x\neq \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.
9. $x\geqslant 0$ et $\sqrt{x}\neq 1$: $\mathcal{D}_9=[0,1[\cup]1,+\infty[$.

Correction — Exercice 2 — Parité

1. $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ symétrique ; $f(-x)=\frac{-3x}{x^2-1}=-f(x)$: **impaire**.
2. $\mathcal{D}_g=]-2,2[$ symétrique ; $g(-x)=g(x)$: **paire**.
3. $2\cos x\neq 1$: $\mathcal{D}_h=\mathbb{R}\setminus\{\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\}$, symétrique ; $h(-x)=\frac{-\sin x}{2\cos x-1}=-h(x)$: **impaire**.
4. $x^3+x=x(x^2+1)\neq 0$: $\mathcal{D}_k=\mathbb{R}^*$; $k(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$, $k(-x)=k(x)$: **paire**.
5. $\mathcal{D}_l=\mathbb{R}$; $l(-x)=l(x)$: **paire**.
6. $\mathcal{D}_m=\mathbb{R}$; $m(1)=1$ et $m(-1)=-1$ ne permettent pas de conclure, mais $m(2)=5$ et $m(-2)=-11\neq\pm 5$: **ni paire ni impaire**.

Correction — Exercice 3 — Bornes et extremums

1. $-1\leqslant\cos x\leqslant 1\Rightarrow 1\leqslant f(x)\leqslant 7$; maximum 7 en $x=2k\pi$, minimum 1 en $x=\pi+2k\pi$.
2. $g(x)=2(x-1)^2-3\geqslant -3$: minimum -3 en $x=1$; g n'est pas majorée ($g(x)\to+\infty$: $g(n)\geqslant 2n^2-4n-1$).
3. $0<h(x)\leqslant 1$: maximum 1 en 0 ; 0 est un minorant non atteint : pas de minimum.
4. $\frac{1}{2}-k(x)=\frac{(x-1)^2}{2(x^2+1)}\geqslant 0$ et $k(x)+\frac{1}{2}=\frac{(x+1)^2}{2(x^2+1)}\geqslant 0$: $-\frac{1}{2}\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}$, maximum $\frac{1}{2}$ en 1, minimum $-\frac{1}{2}$ en -1.

Correction — Exercice 4 — Monotonie par le taux

1. $T_f(x_1,x_2)=x_1+x_2-4$. Sur $[2,+\infty[$: $x_1+x_2>4$, f strictement croissante ; sur $]-\infty,2]$: $x_1+x_2<4$, f strictement décroissante.
2. $\mathcal{D}_g=[-\frac{1}{2},+\infty[$; $T_f(x_1,x_2)=\dfrac{2}{\sqrt{2x_1+1}+\sqrt{2x_2+1}}>0$: g strictement croissante.
3. $T_f(x_1,x_2)=\dfrac{-1}{(x_1+1)(x_2+1)}<0$ sur $]-\infty,-1[$ et sur $]-1,+\infty[$: h strictement décroissante sur chacun.
4. $T_f(x_1,x_2)=1-\dfrac{1}{x_1x_2}=\dfrac{x_1x_2-1}{x_1x_2}$. Sur $]0,1]$: $x_1x_2<1$, donc $T_f(x_1,x_2)<0$

© 2026 — Tous droits réservés

(décroissante) ; sur $[1,+\infty[$: $x_1x_2>1$, croissante.

Correction — Exercice 5 — Parité et monotonie

1. $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$ et $f(-x)=-f(x)$: f est impaire.
2. $T_f(x_1,x_2)=\dfrac{4(4-x_1x_2)}{(x_1^2+4)(x_2^2+4)}$. Sur $[0,2]$: $x_1x_2<4$ (pour $x_1\neq x_2$), $T_f(x_1,x_2)>0$: croissante. Sur $[2,+\infty[$: $x_1x_2>4$, décroissante.
3. f est croissante sur $[0,2]$, donc (imparité) sur $[-2,0]$, et $f(0)=0$: f est strictement croissante sur $[-2,2]$. Elle est strictement décroissante sur $[2,+\infty[$ et, par imparité, sur $]-\infty,-2]$. Valeurs : $f(-2)=-1$, $f(0)=0$, $f(2)=1$.
4. $1-f(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2+4}\geqslant 0$ et $1+f(x)=\frac{(x+2)^2}{x^2+4}\geqslant 0$: $|f|\leqslant 1$; maximum $f(2)=1$, minimum $f(-2)=-1$.

Correction — Exercice 6 — Composée

1. $\frac{x+1}{x-1}\geqslant 0$, $x\neq 1$: $\mathcal{D}_f=]-\infty,-1]\cup]1,+\infty[$.
2. $h(x)=\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$, $g=\sqrt{\ }$. Sur $]-\infty,-1]$: $h(x)\in[0,1[$; sur $]1,+\infty[$: $h(x)\in]1,+\infty[$; dans les deux cas $h(I)\subset\mathbb{R}^+=\mathcal{D}_g$.
3. h est strictement décroissante sur chaque intervalle (déterminant $-2<0$) et g strictement croissante : f strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$ et sur $]1,+\infty[$.

Correction — Exercice 7 — Périodes

1. $\frac{2\pi}{2}=\pi$.
2. $\frac{2\pi}{1/3}=6\pi$.
3. $\frac{\pi}{1/4}=4\pi$.
4. Périodes $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ et $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$; $\pi=2\cdot\frac{\pi}{2}=3\cdot\frac{\pi}{3}$: π est une période.
5. Périodes π ($\cos(2x+3)$) et $\frac{4\pi}{3}$; $4\pi=4\pi=3\cdot\frac{4\pi}{3}$: 4π est une période.
6. Périodes $\frac{2\pi}{3}$ et π : 2π est une période de $\sin 3x$ et de $\sin 2x$; f est 2π-périodique.
7. $x-E(x)$ est 1-périodique car $E(x+1)=E(x)+1$.
8. $E(2x+2)=E(2x)+2$ donc $E(2(x+1))-2(x+1)=E(2x)-2x$: période 1 ; de plus $E(2x+1)=E(2x)+1$ et $2(x+\frac{1}{2})=2x+1$: $f(x+\frac{1}{2})=f(x)$, période $\frac{1}{2}$.
9. $E\left(\frac{x+2\pi}{2\pi}\right)=E\left(\frac{x}{2\pi}\right)+1$: période 2π.

Correction — Exercice 8 — Valeurs prolongées

1. $f(2)=f(0)=1$; $f(3)=f(1)=0$; $f\left(\frac{5}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$; $f(-1)=f(1)=0$; $f(-2)=f(0)=1$.
2. $f(2)=f(0)=0$; $f(3)=f(1)=0$; $f\left(\frac{5}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$; $f(-1)=-f(1)=0$; $f\left(-\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$.

Correction — Exercice 9 — Axes et centres

1. $f(4-x)=(4-x)^2-4(4-x)+1=x^2-4x+1=f(x)$.
2. $\mathcal{D}_g=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ stable par $x\mapsto -4-x$; $g(-4-x)+g(x)=\frac{3x+13}{x+2}+\frac{3x-1}{x+2}=6=2\times 3$.

© 2026 — Tous droits réservés

3. $h(2-x) = -x^3 + 3x^2 - 2 = -h(x)$, donc $h(2-x) + h(x) = 0 = 2 \times 0$.
4. $k(4-x) = |3-x| + |1-x| = k(x)$.

Correction — Exercice 10 — Parité et période

1. $f(T-x) = f(-x) = f(x)$: avec $a = \frac{T}{2}$, $f(2a-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. $f(T-x) = f(-x) = -f(x)$. Avec $x = \frac{T}{2}$: $f\left(\frac{T}{2}\right) = -f\left(\frac{T}{2}\right)$, d'où $f\left(\frac{T}{2}\right) = 0$. Pour tout x : $f(T-x) + f(x) = 0 = 2 \times 0$: $\Omega\left(\frac{T}{2}; 0\right)$ est un centre.
3. $f(1) = \sin\pi = 0$; $f(1-x) = \sin(\pi - \pi x) = \sin \pi x$ donne l'axe $x = \frac{1}{2}$; $f(2-x) = \sin(2\pi - \pi x) = -\sin \pi x = -f(x)$ donne le centre $\Omega(1\,;0)$. L'axe $x = \frac{T}{2} = 1$ n'existe pas ici car f est impaire.

Correction — Exercice 11 — Valeurs absolues

1. Pour $x \geqslant 0$: $2|x+1| - |x| - x = 2x + 2 - 2x = 2 > 0$. Pour $-1 \leqslant x < 0$: $2x + 2 + x - x = 2x + 2 \geqslant 0$. Pour $x < -1$: $-2x - 2 + x - x = -2x - 2 > 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \sqrt{-2x-2}$ sur $]-\infty, -1[$; $f(x) = \sqrt{2x+2}$ sur $[-1, 0[$; $f(x) = \sqrt{2}$ sur $[0, +\infty[$.
3. f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$ (de $+\infty$ à 0), strictement croissante sur $[-1, 0]$ (de 0 à $\sqrt{2}$), constante sur $[0, +\infty[$.
4. Minimum $f(-1) = 0$; pas de maximum sur $]-\infty, -1]$; f est non majorée.

Corrigés des problèmes

Correction — Problème 1

A.

1. $\frac{2x-3}{x-2} \geqslant 0$ et $x \neq 2$: $\mathcal{D}_f =]-\infty, \frac{3}{2}] \cup]2, +\infty[$; $2 + \frac{1}{x-2} = \frac{2x-3}{x-2}$.
2. $h(x) = 2 + \frac{1}{x-2}$ est strictement décroissante sur chaque intervalle ($D = ad - bc = -1 < 0$) à valeurs dans $\mathbb{R}^+$; $f = \sqrt{h}$ est strictement décroissante sur $]-\infty, \frac{3}{2}]$ et sur $]2, +\infty[$.
3. $f(3) = \sqrt{3}$, $f(0) = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Pour $x \in]2, 3]$, f décroît donc $f(x) \geqslant f(3) = \sqrt{3}$. Réciproquement, pour $y \geqslant \sqrt{3}$: $f(x) = y \iff \frac{2x-3}{x-2} = y^2 \iff x = 2 + \frac{1}{y^2-2}$, et $y^2 - 2 \geqslant 1$ donne $x \in]2, 3]$. Donc $f(]2, 3]) = [\sqrt{3}, +\infty[$.

B.

1. $x \in \mathcal{D}_g \iff |x| \in \mathcal{D}_f \iff |x| \leqslant \frac{3}{2}$ ou $|x| > 2$: $\mathcal{D}_g =]-\infty, -2[\cup [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}] \cup]2, +\infty[$, symétrique par rapport à 0; $g(-x) = f(|-x|) = g(x)$: g est paire.
2. Pour $x \geqslant 0$, $g = f$: strictement décroissante sur $[0, \frac{3}{2}]$ (de $\sqrt{3/2}$ à 0) et sur $]2, +\infty[$ (de $+\infty$ à $\sqrt{2}$). Par parité, g est strictement croissante sur $[-\frac{3}{2}, 0]$ (de 0 à $\sqrt{3/2}$) et sur $]-\infty, -2[$ (de $\sqrt{2}$, limite en $-\infty$, à $+\infty$, limite en -2^-).
3. On discute à partir des variations de g (le cas $x = 0$ ne compte qu'une fois) : $m < 0$: 0 solution; $m = 0$: 2; $0 < m < \sqrt{\frac{3}{2}}$: 2; $m = \sqrt{\frac{3}{2}}$: 1; $\sqrt{\frac{3}{2}} < m \leqslant \sqrt{2}$: 0; $m > \sqrt{2}$: 2 solutions $x = \pm\left(2 + \frac{1}{m^2-2}\right)$.

© 2026 — Tous droits réservés

Correction — Problème 2

1. $f(x) = 2-(x-1)^2$: croissante sur $]-\infty, 1]$, décroissante sur $[1, +\infty[$, maximum $f(1) = 2$. Pour $x \in [0,1]$: f croissante donne $1 = f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1) = 2$; réciproquement, pour $y \in [1,2]$, $f(x) = y \iff (x-1)^2 = 2-y$, soit $x = 1-\sqrt{2-y} \in [0,1]$. Donc $f([0,1]) = [1,2]$. De même, $x = 1+\sqrt{2-y} \in [1,2]$: $f([1,2]) = [1,2]$.

2. Sur $[1, +\infty[$, $f(x) = g(x)$. Avec $t = \sqrt{x-1} \geqslant 0$: $x = t^2+1$, $f(x) = 2-t^4$, d'où $2-t^4 = t$, soit $t^4+t-2 = 0$. Or $t^4+t-2 = (t-1)(t^3+t^2+t+2)$ et $t^3+t^2+t+2 > 0$ pour $t \geqslant 0$: $t = 1$, $x = 2$. Unique point commun : $A(2\,;1)$.

3. Pour $x \geqslant 1$: $g(x) < f(x) \iff t < 2-t^4 \iff t^4+t-2 < 0 \iff t < 1$ (le facteur t^3+t^2+t+2 étant positif) $\iff x < 2$. Ensemble des solutions : $[1,2[$.

4. $-x^2+2x = x(2-x) \geqslant 0$: $\mathcal{D}_h = [0,2]$. Le trinôme $u(x) = -x^2+2x$ est croissant sur $[0,1]$, décroissant sur $[1,2]$, à valeurs dans $[0,1] \subset \mathbb{R}^+$; $\sqrt{\ }$ croît : h est croissante sur $[0,1]$ et décroissante sur $[1,2]$.

Correction — Problème 3

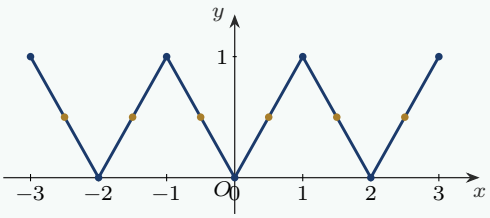
1. Pour $x \in \mathbb{R}$ posons $k = E\left(\frac{x+1}{2}\right)$; alors $-1 \leqslant x-2k < 1$ et $f(x) = f(x-2k) = |x-2k|$. Parité : $f(-x) = f(x)$ sur $[-1,1]$; la périodicité étend cette propriété (une fonction paire sur un intervalle fondamental symétrique et périodique est paire). $f\left(\frac{7}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$; $f\left(-\frac{13}{3}\right) = f\left(-\frac{13}{3}+4\right) = f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

2. $f(2k-x) = f(-x) = f(x)$ ($2k$ multiple de la période, puis parité).

3. Pour $x \in [0,1]$: $f(1-x)+f(x) = (1-x)+x = 1$. Pour $x \in [1,2]$: $f(x) = f(x-2) = 2-x$ et $f(1-x) = f(x-1) = x-1$ (parité), d'où la somme 1. La relation s'étend par 2-périodicité à $\mathbb{R}$. Ainsi $f(1-x)+f(x) = 1 = 2\times\frac{1}{2}$: $\Omega_0\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ est un centre, et la 2-périodicité donne $f(2k+1-x)+f(x) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$: Ω_k est un centre.

4. $f(x+1) = f(1-(-x)) = 1-f(-x) = 1-f(x)$ d'après la question précédente et la parité. Donc $f(x)+f(x+1) = 1$: la fonction $x \mapsto f(x)+f(x+1)$ est constante, alors que f ne l'est pas ; tout réel strictement positif est période de cette somme, qui n'a donc pas de plus petite période, alors que f en possède une (2 ; 1 n'en est pas une car $f(x+1) = 1-f(x) \neq f(x)$ en général).

5. Segments joignant $(2k, 0)$ à $(2k \pm 1, 1)$ (dents de scie symétriques) ; centres Ω_k aux milieux des segments.



© 2026 — Tous droits réservés