

Logique & raisonnements

Devoir surveillé n°1 — Raisonnements, récurrence, sommes et inégalités

 Par **R. Abed** • Professeur Agrégé de Mathématiques

BARÈME

Nom & Prénom : Classe : Note : / 20

 Thèmes étudiés : **Types de raisonnement** **Récurrence** **Sommes Σ et produits Π** **Inégalités**

Durée : 3 heures • Noté sur : 20 points • Ex 1 : 4 • Ex 2 : 5 • Ex 3 : 4 • Problème : 7 (A : 4,5 • B : 2,5)

Consignes

- ◆ **Calculatrice non autorisée** ; téléphone et tout appareil connecté **interdits**.
- ◆ La **clarté**, la **rigueur** et la **présentation** entrent dans l'évaluation.
- ◆ Tout résultat doit être **justifié** ; **encadrer** les résultats finaux. Annoncer le type de raisonnement utilisé (absurde, contraposée, récurrence...).
- ◆ Les exercices sont **indépendants** et peuvent être traités dans l'ordre choisi ; numéroter clairement les questions.
- ◆ Dans le problème, un résultat **admis** à une question antérieure peut être réutilisé.

EXERCICE 1 • Types de raisonnement

Niveau ★★☆☆

Classique

/ 4 pts

 Dans cet exercice, a et b désignent deux nombres réels.

 1. On considère la proposition $\mathcal{P} : \forall \varepsilon > 0, |a - b| < \varepsilon$.

 a) Écrire la négation de $\mathcal{P}$.

0,25 pts

 b) Montrer, par l'absurde, l'implication $(\forall \varepsilon > 0, |a - b| < \varepsilon) \Rightarrow a = b$.

0,75 pts

 2. Montrer l'implication : $\left[\forall x \in \mathbb{R}, (x > a \Rightarrow x > b) \right] \Rightarrow a \geq b$.

1 pt

 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer, par contraposée : si 8 ne divise pas $n^2 - 1$, alors n est pair.

1 pt

 4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre $\sqrt{n^2 + n}$ n'est pas un entier naturel.

1 pt

EXERCICE 2 • Raisonnement par récurrence

Niveau ★★☆☆

Important

/ 5 pts

Montrer par récurrence les propriétés suivantes.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, 17 \text{ divise } 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}.$

0,75 pts

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = 2n^4 - n^2.$

0,75 pts

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{4}{(2k+1)^2}\right)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n = \frac{2n+3}{6n+3}.$

1 pt

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \leq \frac{2n-1}{n}.$

1,25 pts

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n < 2.$

5. On s'intéresse à l'inégalité $(J_n) : 2^n \geq n^2$, où $n \in \mathbb{N}.$

a) Vérifier (J_n) pour $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$: pour lesquelles de ces valeurs est-elle vraie ?

0,25 pts

b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, $2n^2 \geq (n+1)^2$, puis que (J_n) est vraie pour tout entier $n \geq 4.$

0,75 pts

c) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n vérifiant $(J_n).$

0,25 pts

EXERCICE 3 • Calcul de sommes — sommation télescopique

Niveau ★★☆☆

Important

/ 4 pts

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S'_n = \sum_{k=1}^n k^2$ et on rappelle que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$

1. Déterminer les réels α, β, γ tels que le polynôme $P(X) = \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X$ vérifie

1 pt

$$\forall X \in \mathbb{R}, P(X+1) - P(X) = X^2.$$

Factoriser alors $P(X).$

2. En utilisant la question précédente, montrer que $S'_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

0,75 pts

3. On considère la somme $T_n = 1 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots + (2n+1)^2.$

a) Écrire T_n à l'aide du symbole $\Sigma.$

0,25 pts

b) En séparant les termes pairs et impairs de S'_{2n+1} , montrer que $T_n = S'_{2n+1} - 4S'_n.$

0,5 pts

c) En déduire que $T_n = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}.$

0,5 pts

4. On pose $U_n = \sum_{k=1}^n k(k+1) = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1).$

a) Calculer U_n à l'aide de S'_n et mettre le résultat sous forme factorisée.

0,5 pts

b) Retrouver ce résultat en vérifiant d'abord que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*,$

0,5 pts

$$k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1) = 3k(k+1).$$

PROBLÈME • Inégalités classiques et applications

Niveau ★★★★★

Original

/ 7 pts

On se propose d'établir une inégalité « de somme de carrés sur somme » (lemme des fractions) et d'en tirer plusieurs inégalités remarquables, dont celle de Nesbitt.

Partie A — Le lemme des fractions

/ 4,5 pts

1. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq xy$, et préciser le cas d'égalité.
2. Montrer que $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, et préciser le cas d'égalité.
3. Montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}_+^*$: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$, avec égalité si et seulement si $ay = bx$.
4. En déduire que, pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ et $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

0,5 pts

0,75 pts

1 pt

1 pt

5. **Inégalité de Nesbitt.** En écrivant $\frac{a}{b+c} = \frac{a^2}{a(b+c)}$, montrer que

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

1,25 pts

et préciser le cas d'égalité.

Partie B — Applications

/ 2,5 pts

Dans cette partie, a, b, c, x, y, z désignent des réels strictement positifs.

1. Montrer que $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$, avec égalité si et seulement si $a = b = c$.
2. On suppose $a+b+c = 1$. Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$ et préciser le cas d'égalité.
3. Montrer que

$$\frac{x}{y+2z} + \frac{y}{z+2x} + \frac{z}{x+2y} \geq 1.$$

0,75 pts

0,75 pts

1 pt

❖ **Fin du sujet** ❖

Bon courage !