



Chapitre

Calcul trigonométrique

Terminale Sciences Mathématiques · Bac SM → CPGE

Prof : R. Abed

Introduction

La trigonométrie — du grec *trígonon* (triangle) et *métron* (mesure) — est née du besoin d'**arpenter** le ciel et la Terre : les astronomes grecs (Hipparque, Ptolémée) dressent les premières tables de cordes pour prédire la position des astres, tandis que les mathématiciens indiens (Āryabhaṭa, V^e siècle) introduisent le *sinus*. Aujourd'hui, les fonctions cos et sin décrivent tout phénomène **périodique** — oscillations, ondes, courant alternatif, signaux — et deviennent, avec la formule d'Euler $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, la clé du calcul sur les **nombre complexes** et de l'**intégration**.

Boîte à outils — Objectifs pédagogiques

À la fin de ce chapitre, l'élève saura :

- placer un réel sur le cercle trigonométrique et lire cos, sin, tan ;
- exploiter les **formules de symétrie** et les angles associés ;
- résoudre les équations $\cos x = \cos \alpha$, $\sin x = \sin \alpha$, $\tan x = \tan \alpha$ et s'y ramener ;
- manier les formules d'**addition**, de **duplication** et de **factorisation** ;
- **linéariser** $\cos^n x$, $\sin^n x$ et transformer $a \cos x + b \sin x$ en $R \cos(x - \varphi)$ pour résoudre $a \cos x + b \sin x = c$.

Rappel de cours

Prérequis (Tronc commun & 1^{re} Bac). Cercle et repère orthonormé du plan ; théorème de Pythagore ; mesure d'un angle en **radians** ($180^\circ = \pi$ rad) ; fonction, parité et périodicité.

Degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Table des matières

Chapitre — Calcul trigonométrique	1
Le cercle trigonométrique et les valeurs remarquables	4
Cercle trigonométrique, cosinus et sinus	4
La fonction tangente	4
Valeurs remarquables	5
Formules de symétrie et angles associés	5
Angles opposés et supplémentaires	5
Angles complémentaires — passage $\cos \leftrightarrow \sin$	6
Équations trigonométriques	7
L'équation $\cos x = \cos \alpha$	7
L'équation $\sin x = \sin \alpha$	8
L'équation $\tan x = \tan \alpha$	8
Formules d'addition, de duplication et de factorisation	9
Formules d'addition	9
Formules de duplication	9
Angle moitié — les formules en $t = \tan \frac{x}{2}$	10
Sommes, différences et produits	10
Linéarisation des puissances	10
Transformation de $a \cos x + b \sin x$	11
Fiche de révision — l'essentiel	12
QCM d'évaluation — 21 questions	15
Corrigé du QCM	18
Exercices d'application corrigés	20
Problèmes de synthèse	22
Compléments	23
Encart historique	23
Applications concrètes	23
Carte mentale du chapitre	23
Glossaire des notations	24
Auto-évaluation	24
Pour aller plus loin — vers la CPGE	24

Le cercle trigonométrique et les valeurs remarquables

1. Cercle trigonométrique, cosinus et sinus

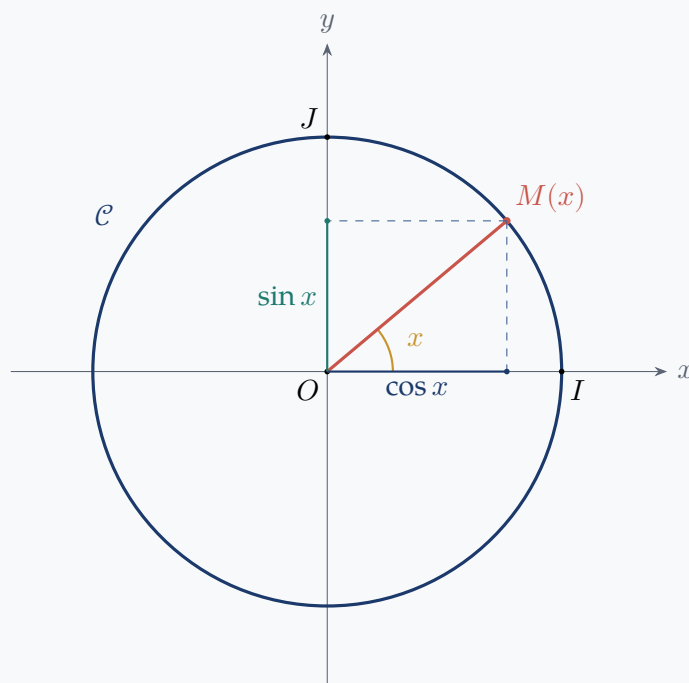
Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Le **cercle trigonométrique** $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1, **orienté** dans le sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre).

À tout réel x on associe l'unique point $M(x)$ de $\mathcal{C}$ tel que la longueur de l'arc $\widehat{IM}$, mesurée dans le sens direct depuis $I(1, 0)$, soit égale à x . On appelle alors :

$$\cos x = \text{abscisse de } M(x), \quad \sin x = \text{ordonnée de } M(x).$$

□ Définition de $\cos x$ et $\sin x$



Le réel x repère le point $M(x)$ sur le cercle de rayon 1 ; son abscisse est $\cos x$, son ordonnée $\sin x$.

Propriété — Propriétés immédiates

Pour tout réel x et tout entier $k \in \mathbb{Z}$:

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \quad -1 \leq \sin x \leq 1, \quad \boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1},$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x \quad (2\pi\text{-périodicité}).$$

Démonstration de l'identité fondamentale. $M(x)$ appartient au cercle de centre O et de rayon 1, donc $OM^2 = 1$. Or $OM^2 = \cos^2 x + \sin^2 x$ par le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle de projections. D'où $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. ■

2. La fonction tangente

Définition

Pour tout réel x tel que $\cos x \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), on pose

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Géométriquement, $\tan x$ se lit sur l'axe des tangentes (la droite d'équation $X = 1$).

Astuce

De $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, en divisant par $\cos^2 x$, on tire la relation très utile

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right).$$

3. Valeurs remarquables

Les valeurs des angles usuels du premier quadrant sont à connaître **par cœur** :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

Astuce — Le moyen mnémotechnique de la « main »

Pour $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, écrivez $\cos x = \frac{\sqrt{n}}{2}$ avec $n = 4, 3, 2, 1, 0$; le sinus suit l'ordre inverse $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Ainsi $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ se retrouvent instantanément.

Piège à éviter

$\tan x$ n'est **pas** défini pour $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$: ne jamais écrire « $\tan \frac{\pi}{2} = \infty$ » dans une égalité. La fonction $\tan$ est π -périodique (et non 2π -périodique) : $\tan(x + k\pi) = \tan x$.

Formules de symétrie et angles associés

Les positions relatives des points $M(x)$, $M(-x)$, $M(\pi - x)$, $M(\pi + x)$ sur le cercle donnent, par simple lecture des coordonnées, toutes les formules dites *d'angles associés*.

4. Angles opposés et supplémentaires

Propriété — Parités et symétries

Pour tout réel x :

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x \quad (\tan(-x) = -\tan x)$$

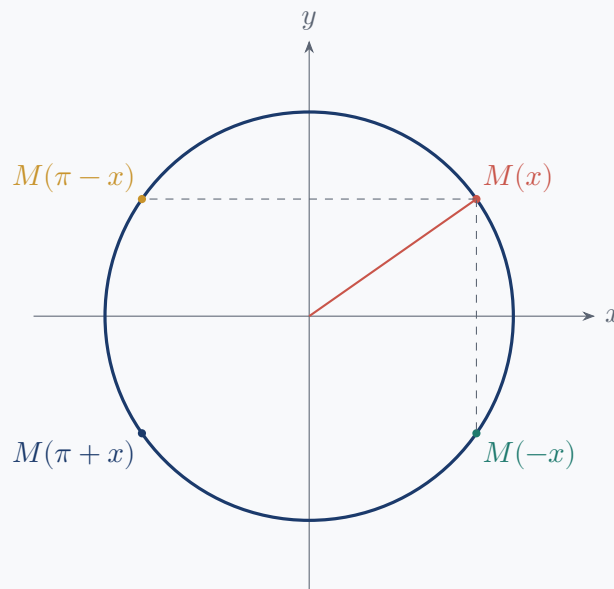
$$\cos(\pi - x) = -\cos x, \quad \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x, \quad \sin(\pi + x) = -\sin x \quad (\tan(\pi + x) = \tan x)$$

Ainsi $\cos$ est **paire** et $\sin$ est **impaire**.

Piège à éviter

Erreur classique : écrire « $\sin(-x) = \sin x$ ». C'est **faux**. Le sinus est *impair* : $\sin(-x) = -\sin x$. Seul le *cosinus* est pair.

Les quatre points associés


Les points $M(x)$, $M(-x)$, $M(\pi - x)$, $M(\pi + x)$ se déduisent par symétrie : axes et origine donnent tous les angles associés.

5. Angles complémentaires — passage $\cos \leftrightarrow \sin$
Propriété

Pour tout réel x :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x.$$

De plus, pour $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta}, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\frac{1}{\tan \theta}.$$

Méthode — Réduire un angle « au premier quadrant »

Pour évaluer $\cos$ ou $\sin$ d'un angle quelconque :

1. ajouter/retrancher un multiple de 2π pour se ramener à $[0, 2\pi[$;
2. utiliser une symétrie ($\pi - x$, $\pi + x$, $-x$) pour se ramener à $[0, \frac{\pi}{2}]$;
3. lire la valeur remarquable, en rétablissant le **signe** donné par le quadrant.

Exemple

$$\cos \frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{et} \quad \sin \frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Équations trigonométriques

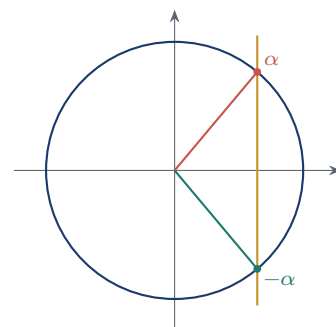
Résoudre une équation trigonométrique, c'est déterminer *tous* les réels x qui la vérifient. Trois modèles fondamentaux servent de référence ; on s'y ramène ensuite par les formules du chapitre.

6. L'équation $\cos x = \cos \alpha$ **Théorème**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$\cos x = \cos \alpha \iff \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Preuve. Deux points du cercle ont la même abscisse $\cos \alpha$ si et seulement s'ils sont *symétriques par rapport à l'axe des abscisses* : ce sont $M(\alpha)$ et $M(-\alpha)$. Modulo un tour complet on obtient les deux familles annoncées. ■

**Méthode — Résoudre $\cos x = a$**

Si $a \notin [-1, 1]$, pas de solution. Sinon, on **reconnait** une valeur remarquable α telle que $a = \cos \alpha$ (prendre $\alpha \in [0, \pi]$), puis on applique le théorème : $x = \pm \alpha + 2k\pi$.

Exercice 1 — Application — huit équations en cosinus★★★★ **Classique**

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\cos x = \frac{1}{2}$;
2. $\cos x = -\frac{1}{2}$;
3. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
4. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
5. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
6. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
7. $\cos x = 0$;
8. $\cos x = 1$.

Correction

1. $\cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ 2. $\cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

3. $\cos x = \cos \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ 4. $\cos x = \cos \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

5. $\cos x = \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ 6. $\cos x = \cos \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

7. $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ 8. $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$

($k \in \mathbb{Z}$.) Pour 7., les deux familles $\pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ fusionnent en $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

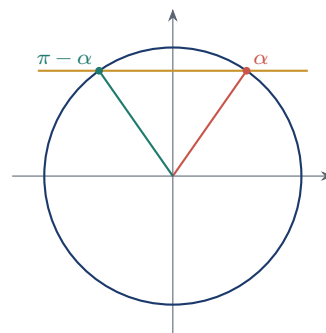
7. L'équation $\sin x = \sin \alpha$

Théorème

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$\sin x = \sin \alpha \iff \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Preuve. Deux points ont la même ordonnée $\sin \alpha$ si et seulement s'ils sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées : ce sont $M(\alpha)$ et $M(\pi - \alpha)$. ■



Correction — Les huit équations en sinus

1. $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ 2. $\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$

3. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ 4. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

5. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ 6. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi$

7. $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$ 8. $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

8. L'équation $\tan x = \tan \alpha$

Théorème

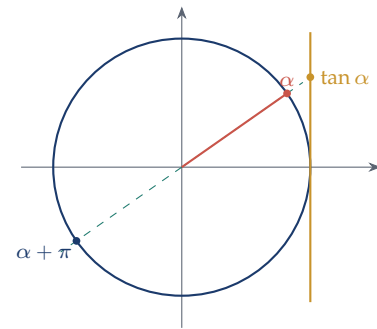
Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Alors

$$\tan x = \tan \alpha \iff x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Preuve. $\tan x$ se lit sur l'axe des tangentes : une même valeur est atteinte aux deux points *diamétralement opposés* $M(\alpha)$ et $M(\alpha + \pi)$, d'où la période π . ■

Piège à éviter

Toujours vérifier la **condition d'existence** $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avant de conclure.



Correction — Les sept équations en tangente

1. $\tan x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$
2. $\tan x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$
3. $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$
4. $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$
5. $\tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$
6. $\tan x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$
7. $\tan x = 0 \Rightarrow x = k\pi$

Formules d'addition, de duplication et de factorisation

9. Formules d'addition

Théorème

Pour tous réels a, b :

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b, & \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b, \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b, & \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b. \end{aligned}$$

De plus, lorsque tous les termes sont définis,

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}, \quad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

Démonstration (produit scalaire). Sur le cercle trigonométrique, $\vec{OM}(a) = (\cos a, \sin a)$ et $\vec{OM}(b) = (\cos b, \sin b)$ sont unitaires et l'angle orienté entre eux vaut $a - b$. Le produit scalaire s'écrit de deux façons :

$$\vec{OM}(a) \cdot \vec{OM}(b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad \text{et} \quad \vec{OM}(a) \cdot \vec{OM}(b) = \|\cdot\| \cdot \|\cdot\| \cos(a-b) = \cos(a-b).$$

D'où $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. On obtient $\cos(a+b)$ en changeant b en $-b$, puis les sinus via $\sin \theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$, et les tangentes en divisant. ■

Astuce

Moyen mnémotechnique : **cosinus** « garde son sérieux » (produit de *mêmes* fonctions, signe *opposé*) ; **sinus** « mélange » (produits *croisés*, *même* signe).

10. Formules de duplication

En posant $a = b = x$:

Propriété

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right).$$

À retenir — Formules de réduction du carré

Conséquence directe de $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Ce sont les formules-clés de la **linéarisation** et du **calcul intégral**.

Piège à éviter

Bien écrire $\cos 2x$ (et non $\cos x$) au numérateur : $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$. L'erreur $\cos^2 x = \frac{1 + \cos x}{2}$ est fréquente et fautive (elle échoue déjà en $x = \frac{\pi}{2}$).

11. Angle moitié — les formules en $t = \tan \frac{x}{2}$ **Propriété**

En posant $t = \tan \frac{x}{2}$ (pour $x \neq \pi + 2k\pi$) :

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

Ces égalités transforment toute expression en $\cos x, \sin x$ en une **fraction rationnelle** en t — outil essentiel pour certaines équations et pour les intégrales.

12. Sommes, différences et produits**Propriété — Transformation somme $\leftrightarrow$ produit**

En posant $p = a + b$ et $q = a - b$ (soit $a = \frac{p+q}{2}$, $b = \frac{p-q}{2}$) :

$$\begin{aligned} \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, & \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}, \\ \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, & \sin p - \sin q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}. \end{aligned}$$

Réciproquement (linéarisation des produits) :

$$\begin{aligned} \cos a \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)], & \sin a \sin b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)], \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]. \end{aligned}$$

13. Linéarisation des puissances

Méthode — Linéariser $\cos^3 x$ et $\sin^3 x$

On abaisse le degré à l'aide des formules du carré, puis on transforme les produits restants en sommes.

$$\begin{aligned}\cos^3 x &= \cos x \cdot \cos^2 x = \cos x \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos x \cos 2x}{2} \\ &= \frac{\cos x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 3x + \cos x}{2} = \boxed{\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x}.\end{aligned}$$

De même, avec $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ et $\sin x \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x)$:

$$\sin^3 x = \frac{\sin x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 3x - \sin x}{2} = \boxed{\frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x}.$$

Exercice 2 — Linéarisation des puissances 4 et 5

★★★★ Important

Linéariser $\cos^4 x$, $\sin^4 x$, $\cos^5 x$, $\sin^5 x$.

Correction

En itérant la méthode (ou via la formule d'Euler $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$) :

$$\begin{aligned}\cos^4 x &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x, & \sin^4 x &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x, \\ \cos^5 x &= \frac{5}{8} \cos x + \frac{5}{16} \cos 3x + \frac{1}{16} \cos 5x, & \sin^5 x &= \frac{5}{8} \sin x - \frac{5}{16} \sin 3x + \frac{1}{16} \sin 5x.\end{aligned}$$

Vérification : en $x = 0$, $\cos^4 0 = 1 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ et $\cos^5 0 = 1 = \frac{5}{8} + \frac{5}{16} + \frac{1}{16}$. ✓

Transformation de $a \cos x + b \sin x$

Théorème

Soit $(a, b) \neq (0, 0)$ et $R = \sqrt{a^2 + b^2}$. Il existe un réel φ (unique modulo 2π) tel que

$$\cos \varphi = \frac{a}{R}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{R},$$

et l'on a, pour tout réel x :

$$\boxed{a \cos x + b \sin x = R \cos(x - \varphi)} = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi).$$

Preuve. $a \cos x + b \sin x = R\left(\frac{a}{R} \cos x + \frac{b}{R} \sin x\right) = R(\cos \varphi \cos x + \sin \varphi \sin x) = R \cos(x - \varphi)$. ■

Remarque

On peut aussi écrire $a \cos x + b \sin x = R \sin(x + \psi)$ avec $\cos \psi = \frac{b}{R}$, $\sin \psi = \frac{a}{R}$. Le point-clé est que l'amplitude $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ ne dépend pas de la forme choisie ; en particulier $-R \leq a \cos x + b \sin x \leq R$.

Méthode — Résoudre $a \cos x + b \sin x = c$

1. Calculer $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ et écrire $a \cos x + b \sin x = R \cos(x - \varphi)$.
2. L'équation devient $\cos(x - \varphi) = \frac{c}{R}$: possible ssi $|c| \leq R$.
3. Résoudre l'équation de référence en cos, puis revenir à x .

Exercice 3 — Deux équations du type $a \cos x + b \sin x = c$

 ★★★ **Classique**

 Résoudre dans $\mathbb{R}$: 1. $\cos x + \sin x = -1$; 2. $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1$.

Correction

 1. Ici $R = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ et $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ($\cos \varphi = \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$). Donc

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{3\pi}{4}.$$

 D'où $x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, soit

$$x = \pi + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

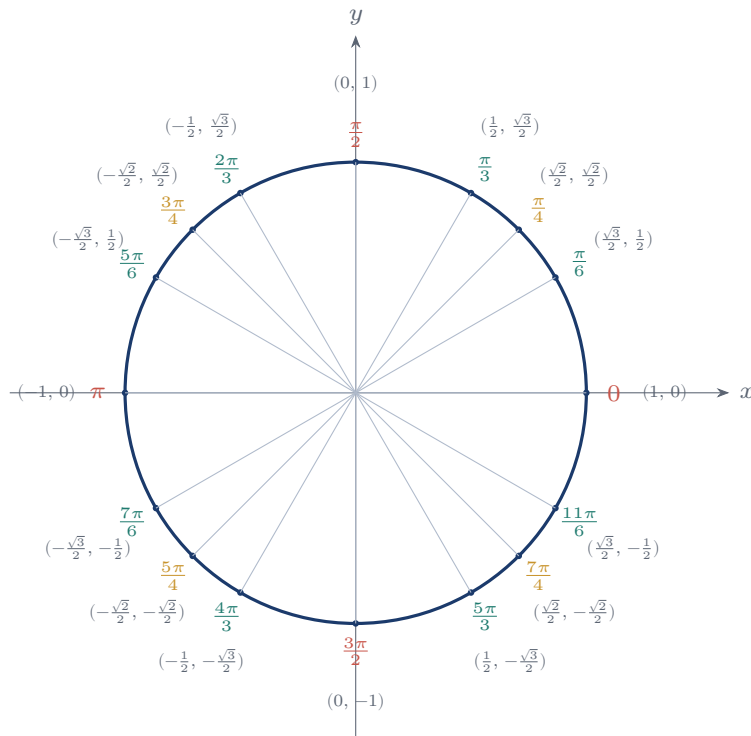
 2. Ici $R = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ et $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ ($\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \varphi = -\frac{1}{2}$). Donc

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \iff \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}.$$

 D'où $x + \frac{\pi}{6} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, soit

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Fiche de révision — l'essentiel



Cercle trigonométrique complet — angles usuels et coordonnées (cos, sin). Couleurs : axes, multiples de $\pi/4$, multiples de $\pi/6$.

■ Identités fondamentales

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

cos, sin : 2π -périodiques; tan : π -périodique.

cos paire, sin et tan impaires.

■ Angles associés

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos x & \sin(-x) &= -\sin x \\ \cos(\pi - x) &= -\cos x & \sin(\pi - x) &= \sin x \\ \cos(\pi + x) &= -\cos x & \sin(\pi + x) &= -\sin x \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x & \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x \end{aligned}$$

■ Équations de référence

$$\cos x = \cos \alpha \iff x = \pm \alpha + 2k\pi$$

$$\sin x = \sin \alpha \iff x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } \pi - \alpha + 2k\pi$$

$$\tan x = \tan \alpha \iff x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

■ Addition

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$$

■ Duplication et carré

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

■ Factorisation

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

■ Angle moitié $t = \tan \frac{x}{2}$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

■ $a \cos x + b \sin x$

avec $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Amplitude
 $\Rightarrow -\sqrt{a^2+b^2} \leq a \cos x + b \sin x \leq \sqrt{a^2+b^2}$.

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2+b^2} \cos(x - \varphi)$$

À retenir — Linéarisation (à mémoriser)

$$\cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x, \quad \sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x.$$

QCM d'évaluation — 21 questions

Pour chaque question, une **seule** proposition est correcte. Le corrigé justifié se trouve en fin de chapitre.

Niveau MOYEN — application directe

☆☆☆☆

Q1. Pour tout réel x , $\cos(-x)$ vaut :

A. $-\cos x$

B. $\cos x$

C. $\sin x$

D. $-\sin x$

Q2. $\sin \frac{\pi}{6}$ est égal à :

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Q3. Les solutions dans $\mathbb{R}$ de $\cos x = 1$ sont :

A. $x = 2k\pi$

B. $x = k\pi$

C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

D. $x = \pi + 2k\pi$

Q4. La fonction $\tan$ est périodique de période :

A. 2π

B. π

C. $\frac{\pi}{2}$

D. 4π

Q5. Pour tout réel x , $\cos^2 x + \sin^2 x$ vaut :

A. 2

B. 0

C. 1

D. $\cos 2x$

Q6. Pour tout réel x , $\sin(\pi - x)$ vaut :

A. $\sin x$

B. $-\sin x$

C. $\cos x$

D. $-\cos x$

Q7. Parmi ces quantités, laquelle n'est **pas** définie ?

A. $\tan \frac{\pi}{3}$

B. $\tan \frac{\pi}{2}$

C. $\tan \frac{\pi}{4}$

D. $\tan 0$

Niveau BON — raisonnement en plusieurs étapes



Q8. Le nombre de solutions de $\cos x = \frac{1}{2}$ dans $[0, 2\pi[$ est :

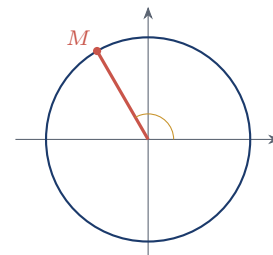
- A. 1
B. 2
C. 3
D. 4

Q9. Pour tout réel x , $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ vaut :

- A. $\sin x$
B. $-\sin x$
C. $\cos x$
D. $-\cos x$

Q10. Sur le cercle ci-contre, le point M correspond à l'angle $\frac{2\pi}{3}$. Ses coordonnées $(\cos, \sin)$ sont :

- A. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
B. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
C. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
D. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



Q11. Pour tout réel x , $\sin 2x$ est égal à :

- A. $2 \sin x \cos x$
B. $\sin^2 x - \cos^2 x$
C. $2 \cos^2 x - 1$
D. $1 - 2 \sin^2 x$

Q12. La forme linéarisée de $\cos^3 x$ est :

- A. $\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x$
B. $\frac{1}{4} \cos x + \frac{3}{4} \cos 3x$
C. $\frac{3}{4} \cos x - \frac{1}{4} \cos 3x$
D. $\cos 3x$

Q13. Les solutions de $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[0, 2\pi[$ sont :

- A. $\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$
B. $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$
C. $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$
D. $\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

Q14. La valeur maximale de $3 \cos x + 4 \sin x$ (pour $x \in \mathbb{R}$) est :

- A. 7
B. 5
C. 3
D. 4

Niveau DIFFICILE — type concours



Q15. Les solutions dans $\mathbb{R}$ de $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1$ sont :

A. $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

B. $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $\pi + 2k\pi$

C. $\pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

D. $\frac{\pi}{6} + k\pi$

Q16. Le nombre de solutions de $\cos 2x = \cos x$ dans $[0, 2\pi[$ est :

A. 2

B. 3

C. 4

D. 6

Q17. Pour tous réels, $\sin 3x - \sin x$ est égal à :

A. $2 \cos 2x \sin x$

B. $2 \sin 2x \cos x$

C. $2 \cos 2x \cos x$

D. $2 \sin 2x \sin x$

Q18. L'équation $\cos x = 2$ admet dans $\mathbb{R}$:

A. deux solutions

B. une solution

C. aucune solution

D. une infinité

Q19. Pour $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (et θ non multiple de π), $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ vaut :

A. $\frac{1}{\tan \theta}$

B. $-\frac{1}{\tan \theta}$

C. $\tan \theta$

D. $-\tan \theta$

Q20. Si $t = \tan \frac{x}{2}$ (avec $x \neq \pi + 2k\pi$), alors $\sin x$ vaut :

A. $\frac{2t}{1+t^2}$

B. $\frac{1-t^2}{1+t^2}$

C. $\frac{2t}{1-t^2}$

D. $\frac{1-t^2}{2t}$

Q21. Les solutions dans $\mathbb{R}$ de $\cos x + \sin x = -1$ sont :

A. $\pi + 2k\pi$ ou $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

B. $\pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

C. $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

D. $\pi + k\pi$

Corrigé du QCM

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7
B	A	A	B	C	A	B
Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
B	B	B	A	A	A	B
Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20	Q21
A	B	A	C	A	A	A

Correction — QCM — niveau moyen

Q1 — B

 $\cos$ est paire : $\cos(-x) = \cos x$.

Q2 — A

Valeur remarquable $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Distracteur B : c'est $\sin \frac{\pi}{3}$.

Q3 — A

 $\cos x = 1 \iff x = 2k\pi$ (et non $\pi/2 + k\pi$ qui donne $\cos x = 0$).

Q4 — B

 $\tan(x + k\pi) = \tan x$: période π , non 2π .

Q5 — C

Identité fondamentale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Q6 — A

Angle supplémentaire : $\sin(\pi - x) = \sin x$.

Q7 — B

 $\tan \frac{\pi}{2}$ n'existe pas car $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Correction — QCM — niveau bon

Q8 — B

 $x = \frac{\pi}{3}$ et $x = \frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi$: deux solutions.

Q9 — B

 $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$. Attention au signe (le complément donnerait $+\sin$).

Q10 — B

 $(\cos \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3}) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Q11 — A

Formule de duplication $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

Q12 — A

Linéarisation $\cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x$ (coefficients $3/4, 1/4$).

Q13 — A

 $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: points du bas, $x = \frac{5\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$.

Q14 — B

 $3 \cos x + 4 \sin x = 5 \cos(x - \varphi)$, $R = \sqrt{9 + 16} = 5$; maximum = 5.

Correction — QCM — niveau difficile

Q15 — A

$$2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Rightarrow x + \frac{\pi}{6} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ d'où } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Q16 — B

$$\cos 2x = \cos x \Rightarrow 2x = \pm x + 2k\pi : x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2k\pi}{3}. \text{ Dans } [0, 2\pi[: 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \text{ soit } 3 \text{ solutions.}$$

Q17 — A

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \text{ avec } p = 3x, q = x : 2 \cos 2x \sin x.$$

Q18 — C

$$\cos x \in [-1, 1] \text{ et } 2 > 1 : \text{ aucune solution.}$$

Q19 — A

$$\text{Angle complémentaire : } \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta}.$$

Q20 — A

$$\text{Formule de l'angle moitié : } \sin x = \frac{2t}{1+t^2}. \text{ Distracteur B : c'est } \cos x.$$

Q21 — A

$$\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \text{ d'où } x = \pi + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Exercices d'application corrigés

Exercice 4 — Valeurs et angles associés

☆☆☆☆ Basique

Calculer sans calculatrice :

$$\cos \frac{7\pi}{6}, \quad \sin \frac{5\pi}{4}, \quad \tan \frac{2\pi}{3}, \quad \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin \frac{7\pi}{6}.$$

Correction

$$\begin{aligned} \cos \frac{7\pi}{6} &= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin \frac{5\pi}{4} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \tan \frac{2\pi}{3} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}; \\ \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin \frac{7\pi}{6} &= \cos \frac{\pi}{3} + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

Exercice 5 — Simplification par symétrie

☆☆☆☆ Basique

Simplifier, pour tout réel x : $A(x) = \cos(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

Correction

$$\cos(\pi - x) = -\cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \sin(\pi + x) = -\sin x, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x. \text{ En sommant : } A(x) = -\cos x + \sin x - \sin x + \cos x = \boxed{0}.$$

Exercice 6 — Équations à angle multiple

☆☆☆☆ Classique

Résoudre dans $\mathbb{R}$: 1. $\cos 2x = \frac{1}{2}$; 2. $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3. $\tan(x + \frac{\pi}{4}) = 1$.

Correction

1. $2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$.
2. $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, d'où $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
3. $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = k\pi$.

Exercice 7 — Une identité

☆☆☆☆ Basique

Montrer que, pour tout réel x : $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$.

Correction

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = (\cos 2x)(1) = \cos 2x. \blacksquare$$

Exercice 8 — Factorisation et résolution

☆☆☆☆ Important

1. Factoriser $\cos x + \cos 3x$. 2. En déduire les solutions de $\cos x + \cos 3x = 0$ dans $[0, 2\pi[$.

Correction

$$1. \cos x + \cos 3x = 2 \cos \frac{x+3x}{2} \cos \frac{3x-x}{2} = 2 \cos 2x \cos x.$$

$$2. 2 \cos 2x \cos x = 0 \iff \cos 2x = 0 \text{ ou } \cos x = 0. \cos 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} : \text{ dans } [0, 2\pi[, x \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}. \cos x = 0 \Rightarrow x \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}. \text{ Six solutions au total.}$$

Exercice 9 — Type $a \cos x + b \sin x$

★★★★☆ Classique

Soit $f(x) = \cos x - \sqrt{3} \sin x$. 1. Écrire $f(x)$ sous la forme $R \cos(x - \varphi)$. 2. En déduire le maximum et le minimum de f , puis résoudre $f(x) = 1$ dans $\mathbb{R}$.

Correction

$$1. R = \sqrt{1+3} = 2, \cos \varphi = \frac{1}{2}, \sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3}. \text{ Donc } f(x) = 2 \cos(x + \frac{\pi}{3}).$$

$$2. -2 \leq f(x) \leq 2 : \text{ maximum } 2 \text{ (en } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi), \text{ minimum } -2 \text{ (en } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi).$$

$$f(x) = 1 \iff \cos(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \iff x + \frac{\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ d'où } x = 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$

Exercice 10 — Linéarisation utile au calcul intégral

★★★★☆ Important

Montrer que $\cos^2 x \sin^2 x = \frac{1 - \cos 4x}{8}$, puis en déduire $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^2 x \, dx$.

Correction

$$\cos^2 x \sin^2 x = (\cos x \sin x)^2 = (\frac{1}{2} \sin 2x)^2 = \frac{1}{4} \sin^2 2x = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1 - \cos 4x}{8}.$$

$$\text{Donc } \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^2 x \, dx = \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4x) \, dx = \frac{1}{8} \left[x - \frac{\sin 4x}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{16}}.$$

Exercice 11 — Une somme remarquable

★★★★☆ Original

Montrer que, pour tout réel x : $\cos^2 x + \cos^2(x + \frac{2\pi}{3}) + \cos^2(x - \frac{2\pi}{3}) = \frac{3}{2}$.

Correction

Avec $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$, la somme vaut

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left[\cos 2x + \cos(2x + \frac{4\pi}{3}) + \cos(2x - \frac{4\pi}{3}) \right].$$

Les trois angles $2x$, $2x + \frac{4\pi}{3}$, $2x - \frac{4\pi}{3}$ sont, modulo 2π , également répartis (pas de $\frac{2\pi}{3}$) : leur somme de cosinus est nulle. Il reste $\frac{3}{2}$. ■

Problèmes de synthèse

Exercice 12 — Problème 1 — Une équation à trois termes

★★★★☆ Important

On considère $f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$.

1. Montrer que $f(x) = \sin 2x (1 + 2 \cos x)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $[0, 2\pi[$.
3. Combien de solutions l'équation $f(x) = 0$ possède-t-elle sur $[0, 2\pi[$?

Correction

1. $\sin x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x$ (somme $\rightarrow$ produit avec $p = 3x, q = x$). Donc $f(x) = 2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = \sin 2x (2 \cos x + 1)$.
2. $f(x) = 0 \iff \sin 2x = 0$ ou $\cos x = -\frac{1}{2}$.
 - $\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$: sur $[0, 2\pi[$, $x \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$;
 - $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x \in \{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$.
 D'où $S = \{0, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\}$.
3. Six solutions.

Exercice 13 — Problème 2 — Amplitude et inéquation

★★★★☆ Important

Soit $g(x) = \cos x + \sqrt{3} \sin x$.

1. Écrire $g(x)$ sous la forme $R \cos(x - \varphi)$ avec $R > 0$ et $\varphi \in]-\pi, \pi]$.
2. Résoudre $g(x) = 1$ dans $\mathbb{R}$.
3. Résoudre l'inéquation $g(x) \geq 1$ sur $[0, 2\pi[$.

Correction

1. $R = \sqrt{1+3} = 2$, $\cos \varphi = \frac{1}{2}$, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$. Donc $g(x) = 2 \cos(x - \frac{\pi}{3})$.
2. $2 \cos(x - \frac{\pi}{3}) = 1 \iff \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \iff x - \frac{\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, d'où $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = 2k\pi$.
3. $g(x) \geq 1 \iff \cos(x - \frac{\pi}{3}) \geq \frac{1}{2} \iff -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \iff 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.
Sur $[0, 2\pi[$: $x \in [0, \frac{2\pi}{3}]$.

Compléments

14. Encart historique

Boîte à outils — Une longue histoire

Antiquité grecque

Hipparque de Nicée (≈ 150 av. J.-C.) puis **Ptolémée** (*Almageste*) construisent des *tables de cordes* pour l'astronomie — l'ancêtre de nos tables de sinus.

Inde

Āryabhaṭa (V^e s.) introduit la demi-corde, le *jyā*, dont la traduction arabe donnera, par contresens, le mot latin *sinus*.

Monde arabo-musulman

Al-Battānī et **Abū al-Wafā** (IX^e – X^e s.) systématisent $\sin$, $\cos$, $\tan$ et démontrent les formules d'addition ; la trigonométrie devient une science autonome.

Europe moderne

Euler (1748) unifie le tout par la formule $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, reliant trigonométrie, exponentielle et nombres complexes.

15. Applications concrètes

Remarque

Physique

Tout *mouvement oscillatoire* (pendule, ressort) s'écrit $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$; la transformation $a \cos + b \sin$ sert précisément à passer à cette forme « amplitude–phase ».

Électricité

Une tension alternative est $u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t)$; sommes de signaux $\rightarrow$ formules d'addition.

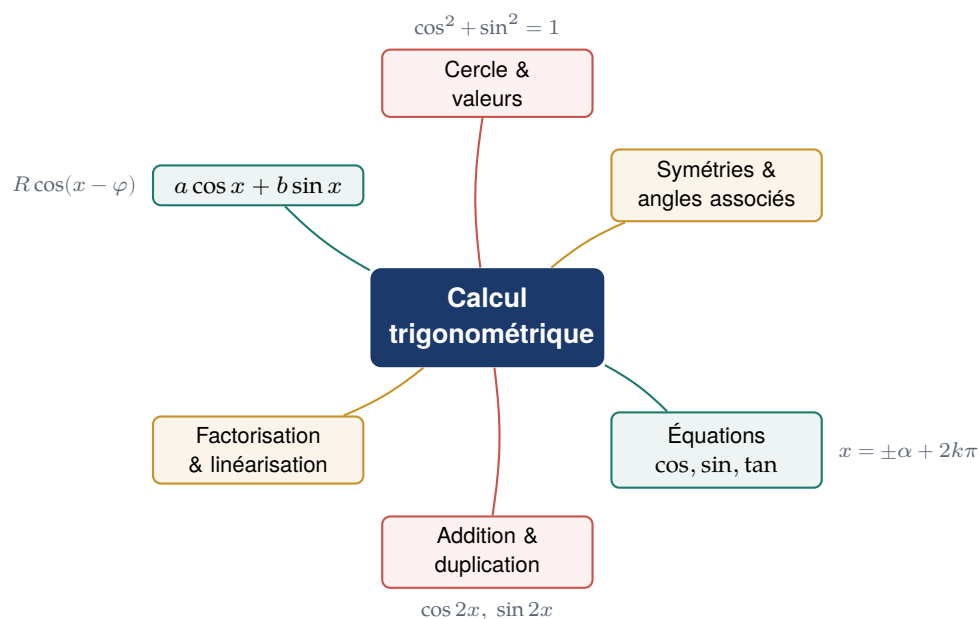
Ondes et son

Les formules de factorisation expliquent le phénomène de *battements* $(\cos p + \cos q)$.

Informatique graphique

Une *rotation* d'angle θ utilise la matrice $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ — les formules d'addition en sont la loi de composition.

16. Carte mentale du chapitre



17. Glossaire des notations

Notation	Signification
$\mathcal{C}$	Cercle trigonométrique (centre O , rayon 1)
$M(x)$	Point image du réel x par enroulement sur $\mathcal{C}$
$\cos x, \sin x$	Abscisse et ordonnée de $M(x)$
$\tan x$	$\sin x / \cos x$, défini si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$k \in \mathbb{Z}$	Entier relatif quelconque (familles de solutions)
$R = \sqrt{a^2 + b^2}$	Amplitude de $a \cos x + b \sin x$
$t = \tan \frac{x}{2}$	Variable de l'angle moitié

18. Auto-évaluation

Je sais...	Oui	Pas encore
placer un réel sur le cercle et lire cos, sin, tan	☐	☐
utiliser les angles associés ($-x, \pi \pm x, \frac{\pi}{2} \pm x$)	☐	☐
résoudre $\cos x = \cos \alpha, \sin x = \sin \alpha, \tan x = \tan \alpha$	☐	☐
appliquer addition, duplication, factorisation	☐	☐
linéariser $\cos^n x, \sin^n x$	☐	☐
transformer $a \cos x + b \sin x$ et résoudre $a \cos x + b \sin x = c$	☐	☐

19. Pour aller plus loin — vers la CPGE

Astuce — Prolongements

- Formule d'Euler** $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ et **Moivre** $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$: elles redémontrent toutes les formules de ce chapitre d'un seul coup.
- Polynômes de Tchebychev** $T_n(\cos x) = \cos nx$.

- **Séries de Fourier** : décomposition d'un signal périodique en somme de cos et sin — la linéarisation y est centrale.
- **Fonctions hyperboliques** $\cosh, \sinh$: mêmes formules, avec des signes modifiés (« trigonométrie du cercle » vs « de l'hyperbole »).