

SÉRIE 2 — DÉNOMBREMENT

Applications concrètes & Problèmes combinatoires

Méthodes clés : **Addition** (cas disjoints) $|A \cup B| = |A| + |B|$ • **Multiplication** (choix successifs) • **Complémentaire** = Total – cas exclus

Exercice 1 Code de Serrure

Un digicode comporte les chiffres 1 à 9 et les lettres A, B, C, D . Le code est formé de **trois chiffres distincts** suivis de **deux lettres** (non nécessairement distinctes), dans cet ordre.

1. Combien de codes différents sont possibles ?
2. Combien comportent exactement **trois chiffres pairs** ?
3. Combien comportent deux lettres **identiques** ?
4. Combien commencent par un chiffre **impair** et se terminent par la lettre A ?

Exercice 2 Octets et Codage Binaire

On appelle **octet** une suite de 8 bits (chacun vaut 0 ou 1).

1. Combien d'octets différents existe-t-il ?
2. Combien d'octets commencent **et** finissent par 0 ?
3. Combien contiennent **exactement quatre** 1 ?
4. Combien ont **plus de six** bits à 1 ?
5. **[Défi]** Combien d'octets sont des **palindromes** (se lisent pareil de gauche à droite et de droite à gauche) ?

0 1 0 1 1 0 1 1

Exemple : 01011011

Exercice 3 Tirage de Boules

Une urne contient **4 boules rouges**, **3 boules jaunes** et **2 boules vertes**. On tire **3 boules** simultanément.

1. Quel est le nombre total de tirages possibles ?
2. Combien de tirages contiennent **trois boules de même couleur** ?
3. Combien contiennent **une boule de chaque couleur** ?
4. Combien contiennent des boules d'exactly **deux couleurs différentes** ?
5. Vérifier la cohérence en additionnant les résultats des questions 2, 3 et 4.

Exercice 4 Plaque d'immatriculation SIV

Depuis 2009, une plaque française a la forme **XX-NNN-XX** où :

- les deux blocs de lettres contiennent 2 lettres chacun (parmi 26 lettres sauf *O, I, U*, et la séquence *SS* est interdite) ;
- le bloc central contient 3 chiffres (000 interdit).

1. Combien de mots de deux lettres sont valides pour chaque bloc ?
2. Combien d'immatriculations SIV sont possibles au total ?
3. Combien de plaques comportent **quatre lettres toutes distinctes** et **trois chiffres tous distincts** ?
4. Combien de plaques sont des **palindromes** (lecture identique à l'endroit et à l'envers) ?

Exercice 5 Élection Syndicale

Une section syndicale de 25 membres (10 femmes, 15 hommes) élit un bureau de 5 membres : un **secrétaire**, un **trésorier** et 3 membres ordinaires (listés par ordre alphabétique).

1. Combien de bulletins de vote valides existent (sans contrainte) ?
2. Avec la règle de **parité** : 2 femmes + 3 hommes, et secrétaire et trésorier de **sexes opposés**, combien de bulletins valides ?
3. **[Variante]** Si en plus le secrétaire doit être une femme, combien de bulletins ?

Exercice 6 Système Braille

Le Braille utilise un tableau de **3 lignes** $\times$ **2 colonnes** (6 cases). Chaque case peut être « emboutie » (1) ou non (0).

1. Combien de caractères différents peut-on créer ?
2. Combien comportent **exactement 2 points emboutis** ?
3. Combien comportent **au plus 4 points emboutis** ?
4. Combien n'ont **aucun point embouti** sur la ligne centrale (2^e ligne) ?
5. Combien ont exactement **2 points emboutis alignés** (sur la même ligne ou même colonne) ?

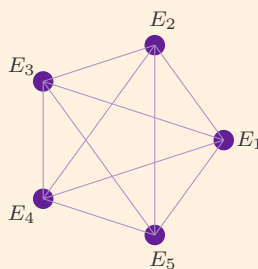


Exemple de caractère

Exercice 7 Créatif — Le Tournoi de Mathématiques

Dans un tournoi de n équipes, chaque paire d'équipes se rencontre **exactement une fois**.

1. Exprimer le nombre total de matchs en fonction de n .
2. Un tournoi a eu lieu avec **45 matchs**. Combien y avait-il d'équipes ?
3. On forme des **groupes de 3 équipes** (pour des mini-poules). Combien de groupes différents peut-on former avec 10 équipes ?
4. Dans chaque groupe de 3, on choisit un **capitaine**. Combien de façons de former un groupe de 3 avec un capitaine désigné ?



Exercice 8 Principe de Dirichlet

1. Montrer que dans un village de **677 habitants**, il existe nécessairement deux personnes ayant les mêmes initiales (prénom + nom).
2. Combien de numéros de téléphone à **10 chiffres** contiennent exactement *deux fois le 1, deux fois le 3 et six fois le 7* ?
3. [Classique] Dans un groupe de **13 personnes**, montrer qu'au moins deux sont nées le même mois.
4. [Défi] Dans n'importe quel ensemble de **5 entiers**, montrer qu'il en existe toujours deux dont la différence est divisible par 4.

« La combinatoire nous rappelle que l'infini commence souvent par un dénombrement fini. »
