

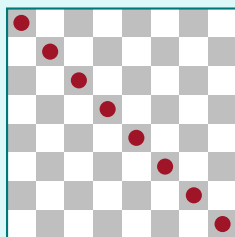
SÉRIE 3 — DÉNOMBREMENT AVANCÉ

Problèmes originaux • Combinatoire & Imagination

Exercice 1 Échiquier et Jetons

On place 8 jetons sur un échiquier classique ($8 \times 8 = 64$ cases).

1. De combien de façons peut-on placer 8 jetons (cases distinctes, sans contrainte) ?
2. Combien de dispositions ont **un jeton par rangée et un jeton par colonne** ?
3. Combien ont les 8 jetons sur la **même colonne** ?
4. Combien ont les 8 jetons sur des cases de la **même couleur** (noir ou blanc) ?
5. Combien ont **deux colonnes avec 3 jetons chacune** et une colonne avec les 2 restants ?



Exercice 2 Suite alternée de Vandermonde

On pose $S_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_{2n}^i$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer S_0, S_1, S_2, S_3 .
2. Montrer que pour $1 \leq k \leq 2n$: $C_{2n}^k = C_{2n-1}^{k-1} + C_{2n-1}^k$.
3. En déduire la relation $S_n = (-1)^n C_{2n-1}^n$ pour $n \geq 1$.
4. Montrer par la formule du binôme que $\sum_{i=0}^{2n} (-1)^i C_{2n}^i = 0$.
5. En déduire finalement : $S_n = \frac{(-1)^n C_{2n}^n}{2}$.

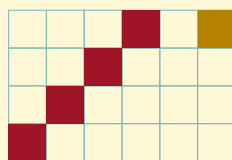
Exercice 3 Urne et Formule d'Abel-Pascal

Une urne contient n boules **noires** et m boules **marron**, toutes indiscernables au sein de chaque couleur. On tire les boules une à une jusqu'à vider l'urne.

1. Combien y a-t-il de configurations (ordres de sortie) différentes ?
2. Soit $k \in \{1, \dots, m+n\}$. Dans combien de configurations la **dernière boule marron** sort-elle en k^{e} position ?
3. En déduire la formule :

$$\sum_{k=1}^m C_n^{k-1} = C_{m+n}^m$$

4. Vérifier cette formule pour $m = n = 3$.

Exercice 4 Créatif — Le Monde de PixelGrille 4×6

Un *pixel-artiste* travaille sur une grille de 4 lignes et 6 colonnes (24 cases). Il veut colorier exactement 8 cases en rouge.

1. Combien de coloriages différents sont-ils possibles (sans contrainte) ?
2. Combien ne comportent aucune case rouge dans la **première ligne** ?
3. Combien comportent **exactement 2 cases rouges** par ligne ?
4. **[Créatif]** L'artiste veut que les cases rouges forment un **chemin connexe** de case en case (deux cases sont adjacentes si elles partagent un côté). Donner une borne supérieure du nombre de tels chemins pour une grille 2×4 .

Exercice 5 Nombres et Chiffres

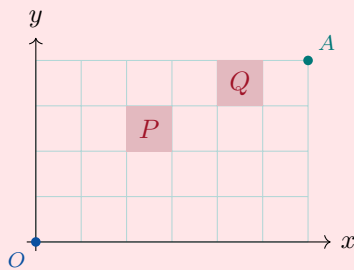
1. Combien d'entiers à exactement $p \geq 1$ chiffres existent ?
2. Combien d'entiers **strictement inférieurs à un milliard** n'utilisent **pas le chiffre 0** ?
3. Quel pourcentage des entiers $< 10^9$ contiennent le chiffre 0 ?
4. **[Créatif]** Combien d'entiers entre 1000 et 9999 ont leurs **chiffres en ordre croissant strict** (ex. : 1359, 2467) ?

Exercice 6 Problème Difficile — Chemins avec Obstacles

Théorème de Lindström-Gessel-Viennot (version simplifiée)

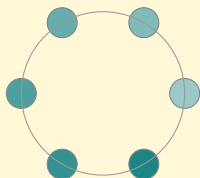
Une puce part de $O(0,0)$ et veut atteindre $A(6,4)$, en se déplaçant uniquement vers le haut ou vers la droite d'une unité à la fois. Certaines cases sont **interdites**.

1. Combien de chemins de O à A existent sans obstacle ?
2. La case $P(2,2)$ est interdite. En utilisant le principe d'inclusion-exclusion, calculer le nombre de chemins évitant P .
3. Les cases $P(2,2)$ et $Q(4,3)$ sont interdites. Calculer le nombre de chemins évitant P et Q .
4. [Défi] Montrer que le nombre de chemins de $(0,0)$ à (n,n) qui **ne franchissent jamais la diagonale principale** (c'est-à-dire restent toujours avec $x \geq y$ sur le chemin) est le **nombre de Catalan** $C_n = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n$. Vérifier pour $n = 3$.



Exercice 7 Permutations Circulaires et Colliers

1. De combien de façons peut-on asseoir **8 personnes** autour d'une table **ronde** ?
2. Parmi ces dispositions, combien ont **deux amis** (Alice et Bob) côte à côte ?
3. **Collier de perles** : On fabrique un collier avec n perles de couleurs toutes distinctes. Deux colliers sont identiques si l'un s'obtient de l'autre par rotation **ou retournement**. Combien de colliers différents peut-on faire avec 6 couleurs ?
4. En utilisant le résultat précédent, comparer avec le nombre de bracelets à 6 perles de 3 couleurs (perles d'une même couleur identiques).



Collier à 6 perles

Exercice 8 — Défi Final — Identité Mystérieuse

Voici une identité remarquable à démontrer par trois méthodes différentes :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{1}{k+1} = \frac{1}{n+1}$$

1. **Méthode algébrique** : Utiliser $\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$ puis reconnaître une somme télescopique ou binomiale.
2. **Méthode analytique** : Intégrer le développement binomial de $(1-x)^n$ entre 0 et 1.
3. **Vérification** : Vérifier numériquement pour $n=3$ et $n=4$.
4. **Généralisation** : Trouver une formule pour $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{1}{k+2}$.

Indice pour la méthode 2 : $(1-x)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^k$, puis intégrer...

« Les mathématiques ne sont pas seulement des nombres — elles sont une façon de penser l'univers. »