

SÉRIE 1 — DÉNOMBREMENT

Arrangements, Combinaisons & Formule du Binôme

Rappels essentiels :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

Exercice 1 Équation combinatoire

Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation :

$$C_{n-1}^{n-5} = 3 C_{n-3}^{n-7}$$

Exercice 2 Identités et Formule du Binôme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer les identités suivantes en développant $(1+x)^n$:

$$(a) \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$$

$$(b) \sum_{k=0}^n k C_n^k = n 2^{n-1}$$

2. Calculer $\sum_{k=0}^n k^2 C_n^k$ en utilisant la dérivée seconde de $f(x) = (1+x)^n$.

3. [Bonus] En substituant $x = \sqrt{2} - 1$, calculer $\sum_{k=0}^n C_n^k (\sqrt{2} - 1)^k$.

Exercice 3 Formule de Pascal — Itération

Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq p \leq n$.

1. Montrer que $C_{k+1}^{p+1} = C_k^{p+1} + C_k^p$.

2. En déduire, par récurrence, la **formule d'itération** :

$$\sum_{k=p}^n C_k^p = C_{n+1}^{p+1}$$

3. Calculer explicitement $\sum_{k=3}^{10} C_k^3$.

Exercice 4 Équations dans $\mathbb{N}$ et distributions

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que le nombre de couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ solutions de $x + y = n$ est $n + 1$.
2. En déduire le nombre de solutions entières non négatives de $x + y + z = 50$.
3. **Application** : De combien de façons peut-on distribuer 50 livres identiques dans 3 écoles (chaque école peut recevoir 0 ou plus) ?
4. **Variante** : Combien de solutions si l'on exige $x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3$?

Exercice 5 Formule de Vandermonde

Soient $m, n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq m$ et $p \leq n$. On considère deux ensembles disjoints E et F de cardinaux m et n .

1. En dénombrant les parties à p éléments de $E \cup F$ de deux façons, établir :

$$\sum_{i=0}^p C_m^i C_n^{p-i} = C_{m+n}^p$$

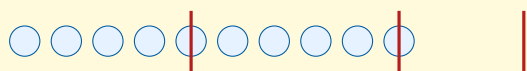
2. En déduire la valeur de $\sum_{i=0}^n (C_n^i)^2$.

3. Calculer explicitement $\sum_{i=0}^4 C_4^i C_4^{4-i}$.

Exercice 6 Étoiles et Barres — Problème Créatif ★

Un boulanger dispose de 4 types de gâteaux (mille-feuille, éclair, macaron, tarte). Un client commande exactement 10 gâteaux.

1. Combien de commandes différentes sont possibles (sans contrainte de stock) ?
2. Combien si le client veut **au moins 2** mille-feuilles et **au moins 1** éclair ?
3. Combien si de plus le client veut **un nombre pair** de macarons ?
4. [Difficile] Combien si chaque type de gâteau est commandé en quantité **strictement inférieure à 4** ?



Méthode des étoiles et des barres

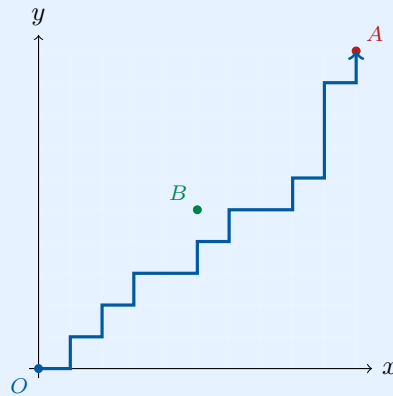
Exercice 7 Anagrammes & Permutations

1. Combien d'anagrammes du mot **OCEAN** existe-t-il ?
2. Combien d'anagrammes du mot **MISSISSIPPI** existe-t-il ?
3. Combien d'anagrammes de **MATHEMATIQUES** commencent et finissent par une voyelle ?
4. Parmi les anagrammes de **ALGEBRE**, combien ont les deux **E** séparés ?

Exercice 8 La Puce sur la Grille

Une puce part de $O(0,0)$ et veut atteindre $A(10,10)$ en ne se déplaçant que d'une unité **vers le haut** ou **vers la droite**.

1. En combien de sauts la puce atteint-elle A ?
2. Combien de chemins différents existent de O vers A ?
3. Combien de chemins passent par le point $B(5,5)$?
4. [Variante] Combien de chemins évitent le point $P(3,3)$?



Exercice 9 Défi — Triangle de Pascal caché

On observe le triangle de Pascal modulo 2 (on remplace chaque coefficient pair par 0 et chaque impair par 1).

1. Écrire les 5 premières lignes du triangle modulo 2.
2. Montrer que $C_{2^n}^k$ est pair pour tout $0 < k < 2^n$ (on pourra utiliser la formule de Lucas ou raisonner sur les facteurs premiers).
3. En déduire que $(1+x)^{2^n} \equiv 1+x^{2^n} \pmod{2}$.
4. Quel motif géométrique célèbre apparaît dans le triangle modulo 2 ? [Le nommer suffit.]

« La combinatoire, c'est l'art de savoir combien de choses il y a sans les énumérer toutes. »
